



# Dynamique d'une interface en présence d'une singularité de contact solide/fluide.

Sébastien Nguyen

## ► To cite this version:

Sébastien Nguyen. Dynamique d'une interface en présence d'une singularité de contact solide/fluide.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Paris-Sud. Faculté des Sciences d'Orsay (Essonne), 2005. Français. NNT : 2005PA112071 . tel-01390365

**HAL Id: tel-01390365**

**<https://theses.hal.science/tel-01390365>**

Submitted on 1 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0 International License

N° d'ordre : 7904

Thèse  
présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI  
Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts

par  
Sébastien Thanh-Lâm NGUYEN

DYNAMIQUE D'UNE INTERFACE EN PRÉSENCE D'UNE  
SINGULARITÉ DE CONTACT SOLIDE/FLUIDE

Soutenue le 21 juin 2005 devant la commission d'examen :

Mme. Claudine DANG VU-DELCARTE	Directeur de thèse
M. Uwe EHRENSTEIN	Rapporteur
M. Didier JAMET	Examineur
M. Gérard LABROSSE	Président
M. Émmanuel LERICHE	Examineur
M. Dietrich SCHWABE	Rapporteur



---

# Table des matières

---

Table des matières	i
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xiii
<b>I Prologue</b>	<b>1</b>
1 Introduction générale	3
<b>II Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2 Problèmes singuliers et modélisations associées</b>	<b>9</b>
2.1 La notion de singularité . . . . .	9
2.2 Origine des singularités étudiées et difficultés inhérentes . . . . .	10
2.2.1 Le problème de la spatule . . . . .	10
2.2.2 La ligne de contact mobile . . . . .	12
2.2.3 Jonction d'une interface soumise à un cisaillement avec une paroi solide .	14
2.3 Traitement numérique des singularités . . . . .	19
2.3.1 Le filtrage des singularités . . . . .	20
2.3.2 Principe de Saint-Venant . . . . .	21
2.3.3 Soustraction de singularité . . . . .	22
2.4 Traitement physique des singularités . . . . .	23
2.4.1 État de l'art de la ligne de contact mobile . . . . .	24
2.4.2 Le glissement . . . . .	27
2.4.2.1 État de l'art . . . . .	27
2.4.2.2 Condition de Navier . . . . .	29
2.4.3 Viscosité d'interface . . . . .	30

2.4.3.1	État de l'art non exhaustif . . . . .	30
2.4.3.2	Modes propres de réponse dynamique de l'interface . . . . .	32
2.4.4	Revue de quelques modèles d'interface . . . . .	33
2.4.4.1	Modèle de Boussinesq . . . . .	33
2.4.4.2	Modèle de Shikhmurzaev . . . . .	35
2.4.4.3	Modèle de G. Kasperski . . . . .	38
2.4.4.4	Modèles d'interface diffuse . . . . .	40
2.4.4.5	Modèle utilisé dans ce travail . . . . .	43
2.5	Organisation du manuscrit . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Modélisation des configurations, conditions aux limites, paramètres adimensionnels</b>	<b>45</b>
3.1	Cavité entraînée . . . . .	45
3.1.1	Modèle classique . . . . .	46
3.1.2	Régularisation . . . . .	46
3.1.3	Glissement . . . . .	47
3.1.4	Glissement non uniforme . . . . .	48
3.1.5	Paramètres adimensionnels . . . . .	48
3.2	Viscosimètre d'interface . . . . .	50
3.2.1	Modèle singulier . . . . .	51
3.2.2	Régularisation . . . . .	52
3.2.3	Glissement . . . . .	52
3.2.4	Paramètres adimensionnels . . . . .	52
3.3	Convection thermique de Rayleigh-Bénard avec parois diffusives . . . . .	53
3.3.1	Modélisation . . . . .	54
3.3.2	Paramètres adimensionnels . . . . .	55
3.4	Cuve différentiellement chauffée . . . . .	57
3.4.1	Modèle classique . . . . .	58
3.4.2	Régularisation . . . . .	59
3.4.3	Viscosité d'interface . . . . .	59
3.4.4	Glissement . . . . .	60
3.4.5	Paramètres adimensionnels . . . . .	60
3.5	Formulation adimensionnelle généralisée . . . . .	62
<b>III</b>	<b>Traitement numérique, validation des algorithmes</b>	<b>65</b>
<b>4</b>	<b>Collocation pseudo-spectrale Chebyshev</b>	<b>67</b>
4.1	Résolution numérique des équations de Navier-Stokes . . . . .	67
4.1.1	Discrétisation temporelle . . . . .	68
4.1.2	Découplage vitesse-pression : méthode de projection-diffusion . . . . .	69
4.1.3	Opérateurs spectraux de dérivation spatiale . . . . .	71

4.2	Résolution de l'équation de Helmholtz - Gestion des conditions aux limites . . .	75
4.2.1	Conditions mixtes uniformes . . . . .	75
4.2.2	Conditions mixtes non uniformes . . . . .	78
4.2.3	Conditions à dérivées mixtes uniformes . . . . .	82
4.2.3.1	La procédure . . . . .	83
4.2.3.2	Conditions de Neumann et Robin . . . . .	86
4.2.3.3	Configurations à 3 dimensions d'espace . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Validation des algorithmes</b>	<b>89</b>
5.1	Formulation des problèmes tests . . . . .	89
5.1.1	Conditions mixtes non uniformes . . . . .	89
5.1.2	Conditions mixtes en dérivées . . . . .	91
5.2	Méthode itérative . . . . .	92
5.2.1	Conditions mixtes non uniformes . . . . .	92
5.2.2	Conditions mixtes en dérivées, uniformes . . . . .	94
5.2.2.1	Cas $\alpha_{1\pm} < 0$ : diffusion . . . . .	94
5.2.2.2	Cas $\alpha_{1\pm} > 0$ : anti-diffusion . . . . .	96
5.2.3	Conclusions . . . . .	98
5.3	Méthode directe . . . . .	99
5.3.1	Validation et comparaison avec la méthode itérative . . . . .	99
5.3.1.1	Cas $\alpha_{1\pm} < 0$ : diffusion . . . . .	99
5.3.1.2	Cas $\alpha_{1\pm} > 0$ : anti-diffusion . . . . .	99
5.3.1.3	Conclusion . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Cavité chauffée par le bas comportant des parois latérales diffusives</b>	<b>101</b>
6.1	Estimations de coût en 2D . . . . .	102
6.2	Convergence de la méthode . . . . .	104
6.2.1	Convergence avec le maillage . . . . .	104
6.2.2	Schéma temporel . . . . .	105
6.2.3	Décroissance de la divergence . . . . .	108
6.3	Détermination des seuils de transition . . . . .	110
6.3.1	Méthodologie . . . . .	111
6.3.2	Dépendance des seuils au coefficient de paroi . . . . .	113
6.4	Étude des échanges thermiques . . . . .	114
6.4.1	États convectifs . . . . .	114
6.4.2	coefficients d'échanges . . . . .	118
<b>IV</b>	<b>Résultats</b>	<b>121</b>
<b>7</b>	<b>Cavité entraînée</b>	<b>123</b>
7.1	Revue . . . . .	124

7.2	Régularisation . . . . .	125
7.2.1	Comportement de la divergence . . . . .	126
7.2.2	Topologie des écoulements régularisés à Reynolds 1500 . . . . .	127
7.2.3	Les seuils d'instationnarité . . . . .	131
7.3	Condition de Navier . . . . .	132
7.4	Glissement non uniforme . . . . .	133
7.4.1	Vitesse de convergence et régularité des solutions en concave et en convexe	134
7.4.2	Topologie des écoulements à $Re = 1500$ . . . . .	138
7.4.2.1	Profils de vitesse et comparaison concave/convexe . . . . .	138
7.4.2.2	Fonction de courant et vorticité . . . . .	141
7.4.3	Transition vers l'état instationnaire en concave . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Viscosimètre d'interface</b>	<b>149</b>
8.1	Solution analytique . . . . .	149
8.1.1	Évolution avec la viscosité d'interface . . . . .	150
8.1.2	Évolution avec le rapport d'aspect . . . . .	153
8.2	Entraînement régularisé . . . . .	153
8.2.1	Évolution des profils de vitesse avec la longueur de filtrage . . . . .	154
8.2.2	Évolution avec la viscosité d'interface . . . . .	156
8.2.3	Évolution avec le rapport d'aspect . . . . .	157
8.3	Prise en compte du glissement . . . . .	157
8.3.1	Évolution avec la longueur de glissement . . . . .	158
8.3.2	Évolution avec la viscosité d'interface . . . . .	161
8.3.3	Évolution avec le rapport d'aspect . . . . .	162
8.3.4	Comparaison entre régularisation et glissement . . . . .	163
8.4	Conclusions . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Écoulements thermocapillaires et singularité de vorticité</b>	<b>167</b>
9.1	Régularité des solutions pour un filtre polynômial . . . . .	168
9.2	Interface visqueuse . . . . .	171
9.2.1	Écoulement . . . . .	173
9.2.2	Singularité de divergence . . . . .	174
9.2.3	Comparaisons avec les résultats de Régnier, Parmentier, Lebon et Platten	176
9.3	Interface visqueuse et glissement . . . . .	179
9.3.1	Analyse a priori de l'effet d'un glissement sur la divergence . . . . .	179
9.3.2	Comportement de la divergence et des grandeurs globales intégrées . . .	179
9.3.3	Écoulement . . . . .	182
9.4	Écoulement dans du mercure . . . . .	186
9.5	Conclusion . . . . .	187

---

<b>V</b>	<b>Épilogue</b>	<b>189</b>
<b>10</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>191</b>
<b>A</b>	<b>Diagonalisation par blocs</b>	<b>195</b>
A.1	Coefficients de l'élimination . . . . .	195
A.2	Problème 3D en coordonnées cylindriques . . . . .	196
<b>B</b>	<b>Jonction thermocapillaire et glissement</b>	<b>199</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>





---

# Table des figures

---

2.1	Plan incliné déplaçant un fluide en contact avec un plan horizontal. . . . .	11
2.2	Plan incliné plongeant dans un liquide à vitesse et angle constants. . . . .	12
2.3	Jonction d'une interface cisailée avec une paroi solide inclinée. . . . .	15
2.4	Jonction d'une interface horizontale soumise à un cisaillement avec un plan vertical. . . . .	16
2.5	Glissement de Navier. . . . .	29
2.6	Viscosité élongationnelle. . . . .	32
2.7	Viscosité de cisaillement. . . . .	33
2.8	Viscosité de variation de courbure. . . . .	33
2.9	Égalisation de la pression par le gradient de densité. . . . .	34
2.10	Bilan des tensions dans la couche interfaciale. . . . .	35
2.11	Profils d'énergie libre volumique et de concentration à l'équilibre. . . . .	41
	(a) $\Psi(C)$ , $-\frac{1}{2} \leq C \leq +\frac{1}{2}$ . . . . .	41
	(b) $C(x)$ , $x \in ]-\infty, +\infty[$ . . . . .	41
3.1	Cavité entraînée 2D. . . . .	46
3.2	Canal entraîné par le fond. . . . .	51
	(a) Viscosimètre de Mannheimer et Schechter . . . . .	51
	(b) Configuration de Gatignol et Prud'homme . . . . .	51
3.3	Rayleigh-Bénard confiné par des parois latérales diffusives. . . . .	54
3.4	Cuve différentiellement chauffée. . . . .	58
4.1	Problème de Helmholtz scalaire à deux dimensions, à conditions de Dirichlet suivant $\vec{e}_z$ et mixtes en dérivées suivant $\vec{e}_x$ . . . . .	82
5.1	Problème de Helmholtz 2D à conditions mixtes non uniformes portant sur les parois verticales. . . . .	89
5.2	Problème de Helmholtz 2D, les conditions mixtes en dérivées portant sur les parois verticales. . . . .	91
5.3	Méthode itérative appliquée à un problème de Helmholtz 2D mixte non uniforme. . . . .	93
5.4	Méthode itérative appliquée à un problème de Helmholtz 2D mixte en dérivées. . . . .	95

5.5	Rayon spectral, cas anti-diffusif. . . . .	97
(a)	$a = 0.0$ . . . . .	97
(b)	$a = 10^3$ . . . . .	97
(c)	$a = 10^6$ . . . . .	97
5.6	Rayon spectral, cas diffusif. . . . .	98
(a)	$a = 0$ . . . . .	98
(b)	$a = 10^3$ . . . . .	98
(c)	$a = 10^6$ . . . . .	98
5.7	Cas diffusif (méthode directe). . . . .	100
5.8	Cas anti-diffusif (méthode directe). . . . .	100
6.1	Temps de calcul, en secondes, de 2000 itérations pour les diagonalisations successives (D.S.), la diagonalisation par blocs (D.B.) et l'inversion directe (I.D.). . . . .	104
6.2	Convergence de l'énergie thermique $E_q$ avec le maillage, $b = 1, 22.10^{-2}$ . . . . .	105
6.3	Convergence de l'énergie cinétique $E_c$ avec le maillage, $b = 1, 27.10^{-2}$ . . . . .	106
6.4	Convergence de la fonction de courant $\psi$ avec le maillage, $b = 1, 27.10^{-2}$ . . . . .	106
6.5	Convergence du rotationnel de la vitesse $\omega$ avec le maillage, $b = 1, 27.10^{-2}$ . . . . .	106
6.6	Évolution temporelle d'un écoulement perturbé. . . . .	107
(a)	$\delta t = 10^{-3}$ . . . . .	107
(b)	$\delta t = 10^{-6}$ . . . . .	107
6.7	Évolution de la divergence, $Ra = 6000$ , $C_w = 0$ , $\delta t = 10^{-3}$ . . . . .	109
(a)	diagonalisations successives . . . . .	109
(b)	diagonalisations par blocs . . . . .	109
6.8	Évolution de la divergence à $Ra = 6000$ . . . . .	110
(a)	$10^{-3} \leq \delta t \leq 10^{-6}$ . . . . .	110
(b)	$C_w = 10^{-3}$ . . . . .	110
(c)	$C_w = 1$ . . . . .	110
(d)	$C_w = 10^3$ . . . . .	110
6.9	Perturbation de l'état conductif. . . . .	112
(a)	$\psi$ fonction de courant . . . . .	112
(b)	$\theta$ température . . . . .	112
6.10	Évaluation du seuil de convection pour $A_h = 1$ et $C_w = 1$ . . . . .	112
(a)	calcul du taux de croissance . . . . .	112
(b)	calcul du Rayleigh critique . . . . .	112
6.11	Diagrammes de stabilité en fonction de $C_w$ pour $A_H = \frac{1}{2}, 1, 2$ . . . . .	113
6.12	Lignes de courant et isothermes pour $A = 1$ . . . . .	115
6.13	Lignes de courant et isothermes pour $A = \frac{1}{2}$ . . . . .	116
6.14	Lignes de courant et isothermes pour $A = 2$ , cas 1. . . . .	117
6.15	Lignes de courant et isothermes pour $A = 2$ , cas 2. . . . .	117
6.16	Nombre de Nusselt horizontal moyen. . . . .	118
(a)	plaque supérieure . . . . .	118
(b)	plaque inférieure . . . . .	118

6.17	Nombre de Nusselt horizontal moyen. . . . .	119
(a)	plaque supérieure . . . . .	119
(b)	plaque inférieure . . . . .	119
6.18	Nombre de Nusselt horizontal moyen. . . . .	119
(a)	plaque supérieure . . . . .	119
(b)	plaque inférieure . . . . .	119
7.1	Polynômes de régularisation et longueurs de filtres. . . . .	126
7.2	Évolution de la divergence, $Re = 1500$ , $\delta t = 10^{-3}$ . . . . .	127
7.3	Régularisation $n = 1$ , pas de temps $\delta t = 10^{-3}$ . . . . .	128
7.4	Régularisation $n = 16$ , pas de temps $\delta t = 10^{-3}$ . . . . .	128
(a)	fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	128
(b)	rotationnel, $\omega$ . . . . .	128
(a)	fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	128
(b)	rotationnel, $\omega$ . . . . .	128
7.5	Régularisation $n = 1$ , pas de temps $\delta t = 10^{-3}$ , coins inférieurs. . . . .	129
7.6	Régularisation $n = 16$ , pas de temps $\delta t = 10^{-3}$ , coins inférieurs. . . . .	129
(a)	fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	129
(b)	rotationnel, $\omega$ . . . . .	129
(a)	fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	129
(b)	rotationnel, $\omega$ . . . . .	129
7.7	Évolution de la divergence avec le maillage pour $l_s = 10^{-1}$ , $10^{-2}$ et $10^{-3}$ . . . . .	132
7.8	Évolution de la divergence avec le maillage. . . . .	135
(a)	glissement concave . . . . .	135
(b)	glissement convexe . . . . .	135
7.9	Fonction de courant $\Psi$ : écart relatif à la solution de référence. . . . .	136
(a)	glissement concave . . . . .	136
(b)	glissement convexe . . . . .	136
7.10	Rotationnel de la vitesse $\omega$ : écart relatif à la solution de référence. . . . .	137
(a)	glissement concave . . . . .	137
(b)	glissement convexe . . . . .	137
7.11	Énergie cinétique $E_c$ : écart relatif à la solution de référence. . . . .	137
(a)	glissement concave . . . . .	137
(b)	glissement convexe . . . . .	137
7.12	Profils de vitesse sur le couvercle, $z = +1/2$ . . . . .	138
(a)	glissement concave . . . . .	138
(b)	glissement convexe . . . . .	138
7.13	Profils de vitesse sur le fond, $z = -1/2$ . . . . .	139
(a)	glissement concave . . . . .	139
(b)	glissement convexe . . . . .	139
7.14	Profils de vitesse sur le mur de gauche, $x = -1/2$ . . . . .	140
(a)	glissement concave . . . . .	140

(b) glissement convexe . . . . .	140
7.15 Profils de vitesse sur le mur de droite, $x = +1/2$ . . . . .	141
(a) glissement concave . . . . .	141
(b) glissement convexe . . . . .	141
7.16 Fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	142
(a) $l_s = 10^{-1}$ , $v_{eff} = 2,98.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 447$ . . . . .	142
(b) $l_s = 10^{-2}$ , $v_{eff} = 7,08.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1060,5$ . . . . .	142
(c) $l_s = 10^{-3}$ , $v_{eff} = 9,33.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1399,5$ . . . . .	142
(d) $l_s = 10^{-4}$ , $v_{eff} = 9,85.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1477,5$ . . . . .	142
7.17 Rotationnel, $\omega$ . . . . .	143
(a) $l_s = 10^{-1}$ , $v_{eff} = 2,98.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 447$ . . . . .	143
(b) $l_s = 10^{-2}$ , $v_{eff} = 7,08.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1060,5$ . . . . .	143
(c) $l_s = 10^{-3}$ , $v_{eff} = 9,33.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1399,5$ . . . . .	143
(d) $l_s = 10^{-4}$ , $v_{eff} = 9,85.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 1477,5$ . . . . .	143
7.18 Glissement non uniforme $l_s = 10^{-3}$ , $Re = 8500$ , $v_{eff} = 8,9.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 7565$ . . . . .	145
(a) fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	145
(b) rotationnel, $\omega$ . . . . .	145
7.19 Glissement non uniforme $l_s = 10^{-1}$ , $Re = 10^5$ , $v_{eff} = 1,74.10^{-1}$ , $\langle Re \rangle = 17400$ . . . . .	146
(a) fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	146
(b) rotationnel, $\omega$ . . . . .	146
8.1 Vitesse au centre de la surface en fonction de $Vi$ . . . . .	151
(a) abscisses en échelle logarithmique . . . . .	151
(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique . . . . .	151
8.2 Débit massique en fonction de la viscosité d'interface $Vi$ . . . . .	152
8.3 Vitesse au centre de la surface en fonction de $A_a$ . . . . .	153
8.4 Débit massique en fonction du rapport d'aspect $A_a$ . . . . .	153
8.5 Profils de vitesse au fond du canal en $z = -\frac{A_a}{2}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	154
8.6 Profils de vitesse en $z = -\frac{A_a}{4}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	154
8.7 Profils de vitesse à la surface du canal en $z = \frac{A_a}{2}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	155
8.8 Évolution du débit massique avec le filtrage pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	155
8.9 Vitesse au centre de la surface en fonction de $Vi$ , pour $N = 4$ . . . . .	156
(a) abscisses en échelle logarithmique . . . . .	156
(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique . . . . .	156
8.10 Débit massique en fonction de la viscosité d'interface $Vi$ , pour $N = 4$ . . . . .	157
8.11 Vitesse au centre de la surface fonction de $A_a$ , pour $N = 4$ . . . . .	158
8.12 Débit massique en fonction du rapport d'aspect $A_a$ , pour $N = 4$ . . . . .	158
8.13 Profils de vitesse au fond du canal en $z = -\frac{A_a}{2}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	158
8.14 Profils de vitesse en $z = -\frac{A_a}{4}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	159
8.15 Profils de vitesse à la surface du canal en $z = \frac{A_a}{2}$ pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	159
8.16 Évolution du débit massique avec le glissement pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	160
(a) $10^{-7} \leq l_s \leq 10^{-1}$ . . . . .	160

(b) $10^{-7} \leq l_s \leq 5.10^{-5}$ . . . . .	160
8.17 Évolution du profil de vitesse le long des parois verticales avec le glissement pour $A_a = 1$ et $Vi = 10^{-2}$ . . . . .	160
8.18 Vitesse au centre de la surface en fonction $Vi$ , pour $l_s = 10^{-3}$ . . . . .	161
(a) abscisses en échelle logarithmique . . . . .	161
(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique . . . . .	161
8.19 Débit massique fonction de la viscosité d'interface $Vi$ , pour $l_s = 10^{-3}$ . . . . .	162
8.20 Vitesse au centre de la surface en fonction de $A_a$ , pour $l_s = 10^{-3}$ . . . . .	162
8.21 Débit massique en fonction du rapport d'aspect $A_a$ , pour $l_s = 10^{-3}$ . . . . .	162
8.22 Profils de vitesse sur le fond. . . . .	164
(a) $\delta x_f \sim \delta x \sim 2,35.10^{-2}$ . . . . .	164
(b) $\delta x_f \sim \delta x \sim 8,70.10^{-2}$ . . . . .	164
8.23 Profils de vitesse sur l'interface. . . . .	164
(a) $\delta x_f \sim \delta x \sim 2,35.10^{-2}$ . . . . .	164
(b) $\delta x_f \sim \delta x \sim 8,70.10^{-2}$ . . . . .	164
9.1 Évolution de la divergence avec le maillage. . . . .	168
(a) pour différentes valeurs de $n$ . . . . .	168
(b) pour différentes valeurs de $Pr$ . . . . .	168
9.2 Écoulement à $Ma = 1500$ pour $Pr = 1$ et une régularisation $n = 4$ . . . . .	170
(a) fonction de courant $\Psi$ . . . . .	170
(b) rotationnel de la vitesse $\omega$ . . . . .	170
(c) champ de température $\theta$ . . . . .	170
9.3 Écoulement le long de la surface libre ( $Ma = 1500$ , $Pr = 1$ et $n = 4$ ). . . . .	171
(a) composante horizontale de la vitesse $u$ . . . . .	171
(b) profil de vorticité $\omega$ . . . . .	171
9.4 Évolution de la divergence avec le maillage. . . . .	172
9.5 Écoulement à $Ma = 1500$ pour $Pr = 1$ et une viscosité interfaciale $Vi = 10^{-1}$ . . . . .	173
(a) fonction de courant $\Psi$ . . . . .	173
(b) rotationnel de la vitesse $\omega$ . . . . .	173
(c) champ de température $\theta$ . . . . .	173
9.6 Écoulement le long de la surface libre ( $Ma = 1500$ , $Pr = 1$ et $Vi = 10^{-1}$ ). . . . .	175
(a) composante horizontale de la vitesse $u$ . . . . .	175
(b) profil de vorticité $\omega$ . . . . .	175
9.7 Origine de la singularité de divergence. . . . .	176
(a) profil de vitesse régulier . . . . .	176
(b) singularité de divergence . . . . .	176
9.8 Évolution de la divergence avec le maillage. . . . .	180
9.9 Évolution des valeurs globales avec le maillage, pour $l_s = 10^{-3}, 10^{-2}$ et $10^{-1}$ . . . . .	181
(a) fonction de courant, $\Psi$ . . . . .	181
(b) rotationnel de la vitesse, $\omega$ . . . . .	181
(c) énergie cinétique, $E_c$ . . . . .	181

	(d) énergie thermique, $E_q$ . . . . .	181
9.10	Écoulement à $Ma = 1500$ pour $Pr = 1$ , $Vi = 10^{-1}$ et un glissement $l_s = 10^{-3}$ . . .	183
	(a) fonction de courant $\Psi$ . . . . .	183
	(b) rotationnel de la vitesse $\omega$ . . . . .	183
	(c) champ de température $\theta$ . . . . .	183
	(d) profil de vorticité $\theta$ . . . . .	183
9.11	Écoulement le long des frontières ( $Ma = 1500$ , $Pr = 1$ , $Vi = 10^{-1}$ et $l_s = 10^{-3}$ ). . .	184
	(a) surface libre, composante horizontale $u$ . . . . .	184
	(b) fond, composante horizontale $u$ . . . . .	184
	(c) paroi gauche, composante verticale $w$ . . . . .	184
	(d) paroi droite, composante verticale $w$ . . . . .	184
9.12	Écoulement à $Ma = 100$ pour $Pr = 2,6 \cdot 10^{-2}$ , $Vi = 4 \cdot 10^{-2}$ et un glissement $l_s = 10^{-3}$ . . . . .	186
	(a) fonction de courant $\Psi$ . . . . .	186
	(b) rotationnel de la vitesse $\omega$ . . . . .	186
	(c) champ de température $\theta$ . . . . .	186
	(d) profil de vorticité $\theta$ . . . . .	186
9.13	Écoulement le long des frontières ( $Ma = 100$ , $Pr = 2,6 \cdot 10^{-2}$ , $Vi = 4 \cdot 10^{-2}$ et $l_s = 10^{-3}$ ). . . . .	187
	(a) surface libre, composante horizontale $u$ . . . . .	187
	(b) fond, composante horizontale $u$ . . . . .	187
	(c) paroi gauche, composante verticale $w$ . . . . .	187
	(d) paroi droite, composante verticale $w$ . . . . .	187

---

# Liste des tableaux

---

3.1	Valeurs des coefficient de l'adimensionnement général exprimées pour chacune des configuration. . . . .	63
5.1	Nombre d'itérations nécessaires pour vérifier le critère de convergence $\delta u_c < 10^{-14}$ . . . . .	93
5.2	Nombre d'itérations nécessaires pour vérifier le critère de convergence $\delta u_c < 10^{-13}$ . . . . .	95
6.1	Coûts en termes de stockage et de nombre d'opérations . . . . .	102
6.2	Mesures des temps d'exécution . . . . .	103
6.3	Convergence des champs avec le pas de temps. . . . .	108
6.4	Comparaison des Rayleigh critiques avec la littérature. . . . .	113
7.1	Longueurs de filtrage. . . . .	126
7.2	Seuils d'instationnarité en régularisation. . . . .	131
7.3	Taux de décroissance de la divergence. . . . .	135
7.4	Seuils d'instationnarité en glissement concave. . . . .	144
8.1	Longueurs de filtrage obtenues par glissement et par régularisation. . . . .	163
9.1	Taux de décroissance de la divergence en régularisation. . . . .	169
9.2	Énergie cinétique intégrée dans le volume et maximum de la composante de horizontale de vitesse sur la surface libre. Résultats en différences finies obtenus par Regnier <i>et al.</i> [120]. . . . .	177
9.3	Évolution du maximum de vitesse à l'interface et de l'énergie cinétique intégrée dans le volume avec le rapport d'aspect et la viscosité interfaciale, résolution spectrale. . . . .	178
9.4	Évolution des maxima dans la cavité de la divergence et de la divergence relative avec le rapport d'aspect et la viscosité interfaciale. . . . .	178
9.5	Taux de décroissance de la divergence. . . . .	180





# Première partie

## Prologue



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

L'objectif de cette thèse a été de montrer qu'il est possible de lever les singularités de vitesse ou de vorticité présentes aux jonctions solide/fluide par une modélisation reposant sur des considérations physiques. Ces singularités interviennent dans un certain nombre de problèmes académiques ou d'écoulements modèles en rapport avec une grande variété de configurations (la cavité entraînée, le pont liquide chauffé latéralement, la ligne de contact mobile). Il est bien connu que les méthodes spectrales sont très sensibles aux singularités, ce qui se traduit par la présence d'oscillations non-physiques (phénomène de Gibbs) au voisinage de la discontinuité. Pour cette raison, pour employer ce type d'approximation numérique, il est nécessaire de remplacer les conditions aux limites singulières par des conditions régulières filtrant explicitement la singularité. Il est moins connu que les méthodes de précision finie (différences finies, volumes finis, éléments finis), qui permettent l'emploi de conditions singulières, introduisent un filtrage implicite de la singularité dépendant de la finesse de résolution spatiale imposée. Des travaux précédents ont montré que l'échelle de filtrage pouvait influencer la structure de l'écoulement à l'échelle globale. Une des principales motivations de cette thèse a pour origine l'observation que la variation de l'échelle de filtrage peut s'accompagner d'une brisure de symétrie de l'écoulement dans les simulations numériques de pont liquide en zone complète<sup>1</sup>. En partant du principe que la physique est régulière, il devrait exister un mécanisme modifiant le comportement du fluide dans la région où le modèle classique est mis en défaut. On est alors amené à formuler deux questions fondamentales. D'une part, quel est l'ordre de grandeur de la petite échelle à laquelle la physique change ? D'autre part, existe-t-il un modèle macroscopique à même de rendre compte de ces effets locaux dans une simulation numérique du milieu continu ?

Les travaux présentés traitent de ces deux questions par la prise en compte de conditions aux limites modifiées pour inclure les effets locaux et la résolution numérique des équations obtenues à l'aide d'un code spectral. Les phénomènes supplémentaires ayant été introduits résultent de l'interaction du fluide avec les frontières à l'échelle locale. Les codes de haute précision qui sont employés permettent de caractériser la régularité de la solution et donc d'identifier l'ordre de la singularité. Deux cas ont été particulièrement étudiés. La cavité entraînée, parce qu'elle est

---

1. En zone complète le domaine de calcul est une zone liquide cylindrique maintenue entre deux barreaux solides par capillarité et soumise à un chauffage latéral le long de la surface libre (c.f. Chénier *et al.* [29] par exemple).

souvent utilisée pour valider de nouveaux codes de calculs, présente un intérêt certain pour les numériciens. Elle constitue aussi un archétype du problème de spatule de Taylor [140]. Le second cas est une cuve aux parois verticales différentiellement chauffées dans laquelle la poussée d'Archimède est négligée. Celle-ci possède un coin chaud et un coin froid à la jonction de la surface libre et des parois verticales et est donc représentative de la plupart des écoulements thermocapillaires confinés.

L'approche utilisée est similaire à celles introduites pour les problèmes d'angle de contact dynamique (ligne de contact mobile), par des auteurs comme Dussan (conditions de glissement), Shikhmurzaev (modèle d'interface et conditions de glissement), Jacqmin (surestimation des échelles locales dans les simulations), qui ont toutes en commun la prise en compte d'effets microscopiques locaux dans la modélisation macroscopique.

Dans le cas des écoulements de cavité entraînée, une condition de glissement de Navier est d'abord appliquée sur toutes les frontières, ce qui autorise le fluide à posséder une vitesse différente de celle des murs, l'écart étant régulé par la longueur de glissement du modèle. La condition de non glissement :

$$u = 0,$$

est remplacée par

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \eta} = l_s^{-1}(\tau)(u_\tau - u_{wall}),$$

où  $u_\tau$  est la vitesse tangente au mur,  $\eta$  est la direction normale,  $l_s$  la longueur de glissement et  $u_{mur}$  la vitesse du mur. Pour la condition de Navier étendue,  $l_s$  n'est pas obligatoirement constante mais varie le long du couvercle et devient ainsi infinie dans les coins. Ceci suffit à rendre l'écoulement régulier. Ces conditions aux limites sont mixtes (conditions de Robin) non uniformes, le coefficient de la dérivée normale,  $l_s$ , dépend de la position le long du couvercle. La résolution numérique de ces équations a nécessité l'emploi d'un algorithme adapté à ce type de conditions qui a été développé antérieurement à cette thèse.

Dans le cas de la singularité des écoulements thermocapillaires, des corrections d'ordre dynamique ont d'abord été appliquées à la condition de Marangoni (selon la formulation proposée par G. Kasperski). Sous certaines conditions, elles reviennent à introduire la viscosité de l'interface comme proposé par Boussinesq ou Bedeaux. La singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires est engendrée par l'existence d'un gradient de température non nul aux jonctions surface libre/paroi. Ce gradient génère une contrainte visqueuse aux coins tandis que l'adhérence du fluide le long des murs verticaux impose que cette même contrainte s'annule. La viscosité d'interface permet à la contrainte de cisaillement à la surface de s'annuler car elle vient compenser le gradient thermique. La condition de frontière traduisant l'équilibre des contraintes devient :

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \eta} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} + Vi \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

où  $u_\tau$  est la composante tangente à la surface libre de la vitesse,  $\eta$  la direction normale,  $Ma$  le nombre de Marangoni qui traduit l'intensité de la contrainte thermocapillaire;  $Vi$  est le coefficient de viscosité interfaciale qui rend compte de la rigidité de l'interface. Ces conditions

aux limites ont nécessité le développement d'un nouvel algorithme spectral durant cette thèse, lequel a fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Computational Physics* en 2004. Cet algorithme direct a permis d'étudier la régularité de la solution. Son usage, associé à l'emploi de l'algorithme de projection-diffusion pour découpler vitesse et pression, a révélé que lorsque la viscosité d'interface est prise en compte, la singularité n'est pas levée et est en partie reportée sur la divergence de la vitesse. L'ajout d'un glissement de Navier le long des parois solides conduit à un comportement plus régulier de l'écoulement.

Le manuscrit est divisé en trois parties. La première partie introduit la problématique de la thèse (décrite plus haut) et fournit l'argumentation justifiant les choix effectués dans le traitement du sujet. Le premier chapitre s'efforce de donner une vision d'ensemble des problèmes de singularité et s'attache particulièrement à la description et l'analyse de trois cas : la singularité de vitesse du problème de Taylor de la spatule, la singularité de vitesse du problème de la ligne de contact mobile, la singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires confinés. Une analyse originale du dernier permet de montrer explicitement l'incompatibilité des conditions aux limites. Le traitement numérique des problèmes singuliers est aussi abordé, ainsi que différentes considérations sur les méthodes de filtrage pour lesquelles un principe de Saint-Venant est habituellement invoqué pour en justifier l'usage. L' tat de l'art des travaux concernant la ligne de contact mobile est alors présenté afin d'en extraire les approches susceptibles de s'appliquer aux écoulements thermocapillaires confinés. Il ressort que le glissement et la viscosité interfaciale sont des modèles susceptibles de conduire à une régularisation physique des écoulements. Ces deux phénomènes sont ensuite présentés du point de vue bibliographique et théorique. Pour chacun, un bref état de l'art est effectué et la formulation du modèle est discutée en termes mathématiques. La viscosité interfaciale est de plus comparée à d'autres modèles d'interface pouvant jouer un rôle similaire. Le deuxième chapitre présente en détails les différentes configurations abordées dans ce mémoire ainsi que leur modélisation (hypothèses simplificatrices, conditions aux limites, paramètres physiques).

La deuxième partie du manuscrit est consacrée à l'outil numérique. Dans le chapitre 4, sont traités les différents algorithmes liés à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en régime incompressible par une méthode de collocation spectrale Chebyshev. La gestion des conditions aux limites est décrite en détail pour servir de base à la présentation d'algorithmes mis au point dans cette thèse et liés au traitement des modèles de glissement et de viscosité interfaciale. Le découplage de la vitesse et de la pression permettant d'assurer l'incompressibilité des écoulements est aussi exposé car il sert de base à l'étude de la régularité des écoulements après modification des conditions aux limites : un écoulement parfaitement régulier voit sa divergence décroître exponentiellement avec le maillage. Le chapitre 5 se consacre à la validation numérique de l'algorithme permettant la prise en compte de conditions de viscosité interfaciale. Le chapitre 6 poursuit cette validation sur un cas plus physique décrivant le mouvement d'un fluide dans une cavité chauffée par le bas comportant des parois latérales diffusives.

La troisième partie présente les résultats des calculs effectués en introduisant les modèles de glissement et de viscosité interfaciale dans trois configurations.

Le chapitre 7, consacré à la cavité entraînée, permet d'étudier le seul effet d'un glissement aux parois. Les résultats obtenus sont comparés aux approches classiques de filtrage. La r -

gularité des solutions est caractérisée par le comportement de la divergence de la vitesse, qui n'est pas nulle mais tend vers zéro avec le raffinement de la discrétisation spatiale en raison de l'emploi de l'algorithme de projection-diffusion. Il est montré que les conditions de Navier avec une longueur de glissement fixée ne suppriment pas la singularité de vitesse. En effet, si la longueur de glissement est fixée, il n'est pas possible de satisfaire conjointement l'annulation de la vitesse horizontale et du terme de cisaillement  $\frac{\partial u}{\partial z}$  aux extrémités du couvercle comme requis par la présence de parois verticales rigides et non poreuses. Une tentative de lever cette contradiction consiste à permettre la variation de la longueur de glissement avec la position le long du couvercle. En première approche, cette variation est fixée de manière arbitraire. Deux types de variations (assez générales) sont comparées. Les variations concaves pour lesquelles le signe de  $l_s''(x)$  est constant et les variations convexes pour lesquelles le signe de  $l_s''(x)$  est négatif au centre et positif près des coins. Seul le premier type de variation est retenu par la suite. Les deux comportements de la longueur de glissement permettent d'obtenir des écoulements réguliers mais le premier semble plus satisfaisant. La stabilité des écoulements obtenus pour le glissement concave est alors comparée aux résultats issus de la régularisation. Lors d'une étude paramétrique faisant varier le rapport de la longueur de glissement à la dimension caractéristique de la cavité, il est observé que les cavités de dimensions microscopiques n'atteignent pas d'état instationnaire à des vitesses d'entraînement relativement importantes. D'autres observations intéressantes concernent le comportement des écoulements dans les coins inférieurs pour lesquels aucune modification au modèle de glissement n'est nécessaire.

Le chapitre 8 présente l'étude d'une configuration décrivant un dispositif de viscosimètre d'interface pour lequel une solution analytique est connue. Ceci permet d'observer l'effet conjoint de la viscosité d'interface et du glissement par comparaison à la solution analytique. Il est observé que les cas limites d'une interface de viscosité infinie correspondant à une paroi solide et d'une viscosité nulle correspondant à une surface libre sont bien décrits. Les conditions de viscosité interfaciale et de glissement se révèlent aussi être compatibles.

Le chapitre 9 concerne la singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires dans une configuration de cuve différentiellement chauffée. On observe que même dans le cas d'un filtrage polynomial de la singularité, la divergence ne décroît pas exponentiellement avec le maillage mais obéit plutôt à une loi de puissance en  $N^{-4}$ ,  $N$  étant le plus haut degré des modes de Chebyshev utilisés. Les conditions à utiliser sont discutées et seule la viscosité d'interface est d'abord retenue. Après l'observation que celle-ci ne supprime pas la singularité, un glissement à la paroi est rajouté. On montre analytiquement que l'emploi conjoint du glissement et de la viscosité interfaciale rend les conditions aux limites, les équations de Navier-Stokes et la contrainte de divergence nulle, compatibles. Numériquement, la divergence de la vitesse décroît alors en  $N^{-2}$ . Bien que partiellement satisfaisant ce résultat permet de conclure en faveur d'une régularisation physique. En effet, l'emploi d'une régularisation polynomiale ne restaure pas non plus la décroissance exponentielle attendue et ne possède pas de pouvoir prédictif sur l'échelle de filtrage pertinente. La régularisation physique permet au contraire de connaître, à priori, cette échelle de filtrage qui est contenue dans le modèle.

Le chapitre 10 est un bref récapitulatif des différents résultats de cette thèse et énonce les perspectives de travaux futurs à présent ouvertes.

# Deuxième partie

## Introduction





# PROBLÈMES SINGULIERS ET MODÉLISATIONS ASSOCIÉES

---

## 2.1 La notion de singularité

Il existe une large classe d'écoulements dont la représentation mathématique communément utilisée fait intervenir une ou plusieurs discontinuités sur le champ de vitesse ou l'une de ses dérivées, aussi désignées singularités. Ces discontinuités peuvent être le résultat d'une géométrie complexe ou d'une idéalisation des conditions aux limites, c'est pourquoi elles sont souvent localisées à l'intersection de deux frontières de natures différentes ou soumises à des contraintes différentes.

Dans le cadre mathématique de la théorie des équations aux dérivées partielles, la présence de telles singularités localisées en un nombre fini de points, ou sur un sous-domaine négligeable devant le domaine de résolution, n'est pas un réel obstacle. Obtenir une solution numérique nécessite par contre un minimum de précautions et un traitement particulier de celles-ci.

Du point de vue physique, il est justifié de s'interroger sur la validité d'une modélisation pour laquelle des singularités existent. La mécanique des fluides se base sur l'hypothèse du milieu continu, c'est-à-dire sur l'existence de grandeurs macroscopiques continues, définies comme des moyennes locales de la dynamique et des interactions à l'échelle microscopique.

Faut-il alors considérer un modèle singulier comme globalement justifié excepté dans un voisinage restreint de la discontinuité, ou chercher à introduire une expression macroscopique d'effets physiques propres au lieu de la singularité ? Enfin quelle est l'échelle de longueur caractéristique du voisinage de la singularité où, soit le modèle de milieu continu doit être modifié, soit il ne s'applique pas ?

Cette thèse est une tentative d'apporter des éléments de réponses par l'emploi d'un nombre restreint d'approches macroscopiques appliquées à la modélisation de problèmes singuliers classiques.

## 2.2 Origine des singularités étudiées et difficultés inhérentes

Dans ce travail les singularités dont il sera question sont au nombre de trois et sont caractéristiques d'écoulements pouvant être décrits par une modélisation académique. La première se rapporte au problème de Taylor [140] décrivant le mouvement d'une spatule déplaçant un liquide le long d'un solide et semble être la première étude d'une singularité de vitesse issue du modèle de milieu continu. La seconde est présente dans le problème de la ligne de contact mobile. La ligne triple ou ligne de contact est le lieu de la jonction entre une interface séparant deux fluides non-miscibles et un substrat solide sur lequel reposent les fluides. La dynamique de la ligne de contact a lieu lorsque les fluides se déplacent sur le substrat. Une étude de Huh et Scriven [77] a montré que le champ de vitesse au voisinage de la ligne triple possède une discontinuité similaire à celle du problème de la spatule. Enfin la dernière singularité apparaît dans la modélisation des écoulements thermocapillaires confinés. Dans ce type d'écoulement, l'interface séparant deux fluides non-miscibles est soumise à un gradient thermique résultant en l'existence de forces de Marangoni agissant sur l'interface et générant le mouvement dans la partie interne de chacun des fluides. Lorsque l'interface n'est ni une surface fermée, ni une surface idéale d'extension infinie, la présence de parois solides limitant l'interface donne lieu à une singularité de vorticité à la jonction solide/interface. Bien qu'il s'applique au cas d'une surface libre soumise à une contrainte visqueuse constante, formant un angle avec une paroi solide et qu'il soit le premier travail ayant mis à jour la singularité de vorticité analytiquement, l'article de Moffatt [104] ne fait pas explicitement le lien avec les écoulements thermocapillaires. Il faut attendre les travaux de Chénier [30], Kasperski et Labrosse [86], Chénier *et al.* [29] pour que la présence de la discontinuité de vorticité et son importance dans la simulation numérique des écoulements thermocapillaires soient explicitement reconnues. Enfin, il faut souligner que si une vision synthétique du traitement analytique de ce type de problèmes au voisinage du point de discontinuité est donnée par l'article de Moffatt [104] qui en développe tous les aspects mathématiques, il ne montre pas de quelle manière la formulation du problème est à l'origine de ces singularités.

Dans ce qui suit les solutions analytiques du problème de Stokes sont présentées pour les problèmes de la spatule, de la ligne de contact mobile et des écoulements thermocapillaires confinés au voisinage du point singulier. Un bon exposé du traitement mathématique du problème de Stokes dans un coin détaillant les diverses solutions est disponible dans la thèse de Mathieu [102].

### 2.2.1 Le problème de la spatule

La figure 2.1 représente le problème de la spatule, étudié par Taylor [140], dans lequel un fluide visqueux est soumis au mouvement relatif de deux plans formant un angle  $\alpha$ . Dans ce cas, l'origine de la singularité est évidente. En se plaçant dans le référentiel du plan incliné, le plan horizontal se déplace avec une vitesse  $U$ .    la jonction des deux parois la condition d'adhérence ne peut être respectée à la fois sur les deux frontières. En se limitant à un voisinage suffisamment près du coin, il est possible de négliger les termes inertiels. Le fluide vérifie l'équation de Stokes,

ce qui se traduit sur la fonction de courant par l'équation :

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (2.2.1)$$

La fonction de courant est une fonction bi-harmonique que l'on peut écrire comme une série de termes de la forme  $\psi = r^n f(\theta)$ . La vitesse est obtenue en dérivant  $\psi$  :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.2.2)$$

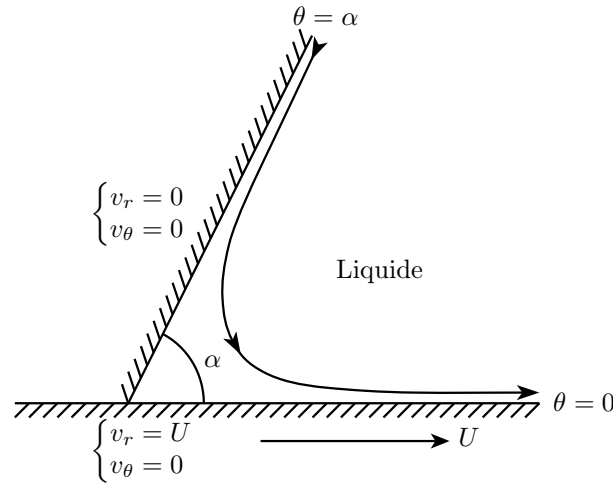


FIGURE 2.1 – Plan incliné déplaçant un fluide en contact avec un plan horizontal.

Dans le cas de la spatule, les conditions aux limites nécessitant que la vitesse soit constante le long des parois (voir fig. 2.1) et les composantes de vitesse étant des dérivées premières de  $\psi$ , ces dernières perdent un ordre en  $r$  par rapport à  $\psi$  :

$$v_r \propto r^{n-1} \quad \text{et} \quad v_\theta \propto r^{n-1}. \quad (2.2.3)$$

La solution ne fait alors intervenir que le terme  $n = 1$  et la forme générale de la fonction de courant est :

$$\psi = Ur(A \cos \theta + B \sin \theta + C\theta \cos \theta + D\theta \sin \theta). \quad (2.2.4)$$

Les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont déterminés par les quatre conditions aux limites sur la vitesse<sup>(1)</sup>. La fonction de courant et les composantes de la vitesse prennent alors la forme :

$$\psi = Ur f(\theta), \quad v_r = U f'(\theta), \quad v_\theta = -U f(\theta), \quad (2.2.5)$$

où la nouvelle fonction  $f$  vérifie :

$$f(0) = 0, \quad f(\alpha) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\alpha) = 0. \quad (2.2.6)$$

---

1.  $A = 0$ ,  $B = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}$ ,  $C = -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}$  et  $D = -\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}$ .

Si  $v_\theta$  ne pose pas de problème,  $v_r$  est en revanche singulière pour  $r = 0$  où les deux parois se rejoignent. La contrainte visqueuse le long de la paroi mobile est  $\mu \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \propto \frac{2\mu U}{r}$  et devient donc infinie au point de jonction ( $\mu$  étant la viscosité dynamique du liquide). La force nécessaire pour déplacer le fluide s'obtient en intégrant la contrainte le long de cette paroi et varie donc en  $\ln r$  :  $\int \mu \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} dr \propto 2\mu U \ln r$ , de même pour la pression :  $P \propto \frac{2\mu}{r}$ .

La modélisation classique du problème de la spatule peut se résumer ainsi :

- la singularité résulte de l'incompatibilité des conditions de vitesse au point de jonction entre les parois,
- cette singularité de vitesse se traduit par une contrainte infinie au point de jonction,
- le caractère non-physique du modèle est mis en évidence par la force nécessaire pour mettre le fluide en mouvement qui est infinie.

### 2.2.2 La ligne de contact mobile

La ligne de contact mobile est un exemple encore plus frappant de la mise en échec du modèle de milieu continu. Si les inconsistances du problème de la spatule peuvent être mises sur le compte d'une formulation mathématique trop idéalisée, il semble en effet difficile de réaliser une expérience dans laquelle la spatule se déplacerait parfaitement le long du mur sans laisser de liquide s'échapper ni heurter celui-ci, les lignes triples en mouvement s'observent en revanche quotidiennement dans les gouttes de rosée ou chaque fois que l'on remplit un verre d'eau. La figure 2.2 représente le cas d'une paroi solide plongeant dans un liquide avec un angle  $\alpha$  à une vitesse constante  $U$  suffisamment faible pour que la surface soit plane lorsque  $\alpha$  est l'angle prévu par la loi de Young-Dupré :  $\cos \alpha = \frac{\sigma_{s/g} - \sigma_{s/l}}{\sigma_{l/g}}$ , où  $\sigma_{s/g}$ ,  $\sigma_{s/l}$  et  $\sigma_{l/g}$  sont respectivement les tensions de surface des interfaces solide/gaz, solide/liquide et liquide/gaz.

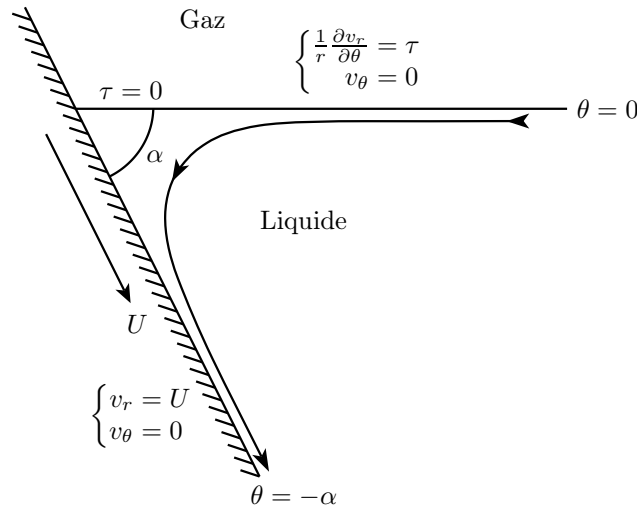


FIGURE 2.2 – Plan incliné plongeant dans un liquide à vitesse et angle constants.

Cette fois encore, l'incompatibilité des conditions imposées aux frontières est évidente. Elle

provient de l'adhérence du liquide à la paroi solide et de l'immobilité relative de l'interface liquide/gaz. Au point de jonction le fluide en contact avec la paroi est en mouvement à la vitesse  $U$  dans la direction de la paroi. L'interface est au repos, c'est-à-dire qu'elle ne se déforme pas, ce qui se traduit par une vitesse nulle dans la direction normale à l'interface. En projetant la vitesse le long de la paroi dans les directions normale et tangente à l'interface il vient  $\vec{v}(-\alpha) = U \cos \alpha \vec{t} - U \sin \alpha \vec{n}$  et au point triple  $-U \sin \alpha \neq 0$ .

En suivant une démarche similaire à l'article de Huh et Scriven [77] il est possible de connaître le champ de vitesse solution du problème singulier pour un écoulement de Stokes (voisinage du point singulier) et en supposant que l'interface reste plane (nombre capillaire petit  $Ca = \frac{\mu U}{\sigma_{l/g}} \ll 1$ ). Enfin en se limitant à l'étude de la seule phase liquide, le problème à résoudre est analogue à celui de la section 2.2.1 où la paroi fixe est remplacée par l'interface liquide/gaz. La fonction de courant est encore recherchée sous la forme  $r^n f(\theta)$ . La condition d'adhérence à la spatule est remplacée par une condition de contrainte tangentielle nulle à l'interface qui s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \quad \text{en } \theta = 0. \quad (2.2.7)$$

La puissance de  $r$  est encore une fois fixée par la condition d'adhérence de la paroi mobile ( $\theta = -\alpha$ ) qui nécessite que  $n = 1$ . La fonction  $f(\theta)$  sera du même type que dans la section 2.2.1. Les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  s'obtiennent à l'aide des conditions aux limites sur la vitesse (voir fig. 2.2) qui imposent à  $f$  de vérifier :

$$f(0) = 0, \quad f(-\alpha) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'(-\alpha) = 1. \quad (2.2.8)$$

La fonction de courant prend alors la forme<sup>(2)</sup> :

$$\psi = Ur \frac{\alpha \cos \alpha \sin \theta - \theta \cos \theta \sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (2.2.9)$$

Les composantes de la vitesse sont par conséquent proportionnelles à la vitesse de la paroi :  $v_r \propto U$  et  $v_\theta \propto U$ . Comme indiqué dans l'article de Huh et Scriven [77] la contrainte tangentielle le long de la paroi solide est singulière au point de jonction ( $r = 0$ ) :  $\mu \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \propto \frac{2\mu}{r}$ , ce qui se traduit par une force de réaction infinie en logarithme de  $r$  s'appliquant sur la plaque :  $F \equiv \int \mu \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} dr \propto 2\mu U \ln r$ . De même l'incrément de pression par rapport à l'état hydrostatique est proportionnel à  $\frac{1}{r}$  :  $p - p_0 \propto -\frac{2\mu}{r}$ .

La pression joue un rôle plus important dans le cas d'une jonction entre surface libre et paroi solide que dans celui d'une jonction entre deux parois solides. Si l'hypothèse que la surface libre est plane et indéformable est levée le calcul du profil de l'interface s'effectue en résolvant l'équation de Laplace-Young :  $p - p_0 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux associés à une surface quelconque. La singularité de vitesse ne dépend pas de la courbure de l'interface. Il semble donc raisonnable de considérer que l'incrément de pression reste singulier au point triple. La courbure de l'interface n'y est alors pas définie

---

2. avec  $A = 0$ ,  $B = \frac{\alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ ,  $C = -\frac{\sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$  et  $D = 0$ .

et par conséquent, l'angle de contact non-plus. Ceci fait apparaître la nécessité d'améliorer la description physique du point triple à des échelles locales proches de l'atome (quelques Angströms). Par ailleurs, il a été mis en évidence par Ngan et Dussan [106] que l'angle formé par la tangente à l'interface avec la paroi solide dépend de  $r$  de manière significative près de la ligne de contact ( $r < 100\mu m$ ). Il en découle que l'angle mesuré expérimentalement est un angle de contact macroscopique différent de l'angle de contact réel à l'échelle moléculaire qui vérifie probablement toujours la loi de Young-Dupré. En effet, à des distances très faibles de la jonction les forces moléculaires dominent sur toutes les autres forces et la relation d'équilibre de l'angle de contact s'applique dans la mesure où la notion de profil d'interface conserve un sens. L'angle de contact dynamique est par conséquent un concept macroscopique qui reflète l'influence du mouvement sur l'angle mesuré à la limite de résolution accessible. La connaissance de l'angle de contact macroscopique est indispensable à la description hydrodynamique du mouvement de la ligne triple car il constitue la condition limite qui permet de déterminer le profil de l'interface par l'équation de Laplace, duquel dépendent directement les trajectoires des particules fluides. De surcroît, Blake *et al.* [13] ont montré expérimentalement que l'hydrodynamique loin du point triple est susceptible d'avoir une influence sur la valeur de l'angle de contact observé. Cette rétroaction entre l'angle de contact et l'écoulement complique d'autant plus la description hydrodynamique du déplacement de la ligne triple.

Les difficultés de la description de la ligne de contact mobile sont :

- le saut de vitesse à la jonction solide/liquide/gaz se traduisant par une singularité du même type que dans le problème de la spatule. La description continue classique conduit à la présence d'une force de dissipation visqueuse infinie.
- la rétroaction entre l'angle de contact et l'écoulement. L'angle de contact dynamique nécessite une description appropriée pouvant dépendre de l'écoulement. Le profil d'interface n'est pas connu et nécessite la connaissance de l'écoulement et de l'angle de contact dynamique pour pouvoir être déterminé. L'écoulement dépend directement du profil de l'interface.

### 2.2.3 Jonction d'une interface soumise à un cisaillement avec une paroi solide

Le problème de l'écoulement dans un angle formé par la jonction d'une interface liquide/gaz soumise à une contrainte avec une paroi solide inclinée constitue un autre exemple de situation où la description macroscopique continue est mise en échec localement. Le cas des écoulements thermocapillaires confinés peut être rapporté à celui-ci en considérant qu'il existe une zone proche des jonctions interface/solide où à la fois l'inertie du fluide est négligeable et le gradient thermique est constant (Canright [22]). Dans cette zone l'écoulement est alors décrit par le problème de Stokes comme introduit par Moffatt [104] (voir fig. 2.3).

Dans cette configuration, une interface soumise à une contrainte  $\mu\tau = -\gamma\frac{\partial T}{\partial r}$  due aux forces de Marangoni résultant d'un différentiel de température entre la paroi solide et le fluide<sup>(3)</sup> est

---

3. Les forces de Marangoni résultent de la dépendance de la tension de surface  $\sigma$  vis-à-vis de la température.

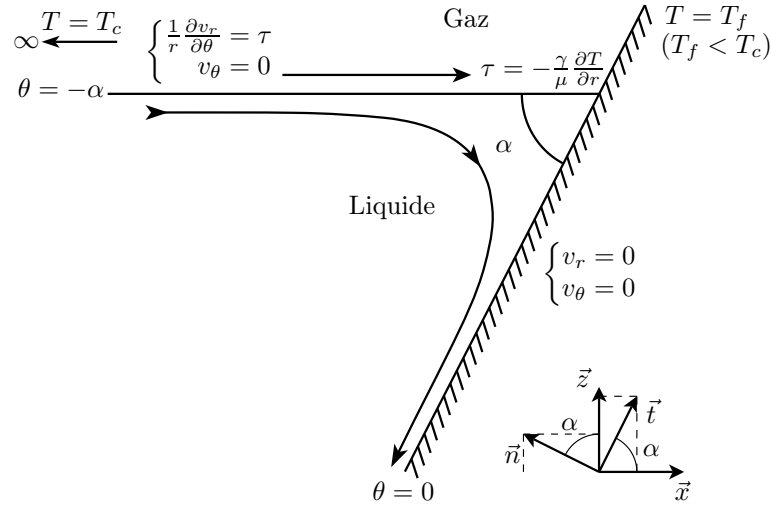


FIGURE 2.3 – Jonction d’une interface cisailée avec une paroi solide inclinée.

en contact avec une paroi inclinée d’un angle  $\alpha$  et maintenue à une température constante  $T_f$ . Les grandeurs  $\mu$  et  $\gamma$  sont respectivement la viscosité dynamique et le coefficient de variation thermique de la tension de surface. Loin de la jonction, le fluide est à la température  $T_c > T_f$  ce qui se traduit par une contrainte dirigée vers la jonction. Le fait d’imposer le gradient thermique non-nul à la jonction est tout à fait consistant avec le cas des écoulements thermocapillaires pour lesquels ceci est généralement vérifié.

#### *Origine de la singularité des écoulements thermocapillaires :*

Ici la présence d’une singularité à la jonction n’est pas aussi apparente que dans les deux cas précédents. En effet il est difficile de conclure pour un angle d’inclinaison quelconque. Intuitivement il est possible de comprendre la contradiction introduite par les conditions aux limites en considérant le rotationnel de la vitesse  $\omega$  dans le domaine et en particulier le long des parois. Celui-ci est imposé constant égal à  $-\tau$  et est par conséquent négatif le long de la surface libre. Le fluide entraîné par la surface libre redescend le long du plan incliné. Son adhérence au solide résulte en un rotationnel positif le long de celui-ci. Le contour de vorticité nul doit donc passer par la jonction or la vorticité ne s’annule pas sur l’interface donc la vorticité change de signe sans s’annuler. Cette incompatibilité peut-être démontrée en écrivant les conditions vérifiées par chacune des composantes de la vitesse le long des parois. Pour simplifier cette procédure est appliquée au cas d’une paroi verticale ( $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ), représenté en figure 2.4, avant de traiter le cas d’un angle quelconque.

Le long de la surface libre, la condition de Marangoni fait intervenir la vitesse horizontale

---

Au premier ordre  $\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0)$ . Un gradient thermique se traduit alors par une force de cisaillement engendré par le différentiel local de tension superficielle décrit par la relation :  $\mu \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial r}$ .



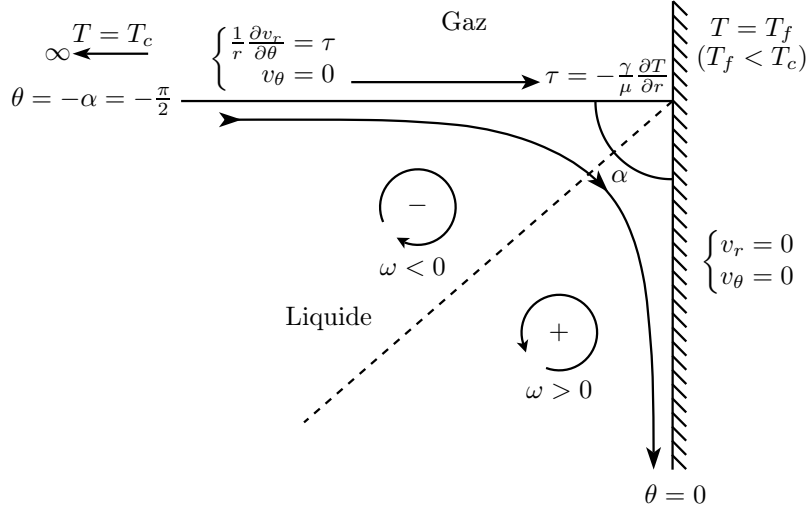


FIGURE 2.4 – Jonction d’une interface horizontale soumise à un cisaillement avec un plan vertical.

qui vérifie :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \tau, \quad \text{avec} \quad \tau = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial T}{\partial r} > 0 \quad \text{en} \quad \theta = -\alpha. \quad (2.2.10)$$

Le long de la paroi solide, la composante de vitesse normale à celle-ci, soit  $v_{\vec{n}}$  pour  $\theta = 0$ , doit s’annuler car la paroi est rigide et non poreuse et par conséquent sa dérivée dans la direction tangente est aussi nulle :

$$v_{\vec{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} v_{\vec{n}} \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en} \quad \theta = 0. \quad (2.2.11)$$

Enfin pour  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , au point de jonction, la normale à la paroi est dans la direction radiale et la composante normale de vitesse devient la composante radiale :

$$\text{en } \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad v_{\vec{n}} = v_r \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} v_{\vec{n}} \cdot \vec{t} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \neq \tau. \quad (2.2.12)$$

L’incompatibilité entre les conditions s’appliquant sur la surface solide et sur la surface libre résulte en une singularité sur la vorticité. Pour un angle  $\alpha$  quelconque la démonstration est moins évidente et nécessite de revenir aux coordonnées cartésiennes et d’introduire le vecteur tangent à la paroi  $\vec{t}$  et le vecteur normal  $\vec{n}$ , voir figure 2.3, définis par rapport aux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  par :

$$\begin{cases} \vec{t} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{z}, \\ \vec{n} = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{z}. \end{cases}$$

De même les composantes de vitesse tangentielle et normale à la paroi,  $v_t$  et  $v_n$ , seront utilisées pour exprimer les conditions de vitesse le long de la paroi solide. Elles s’expriment en fonction

des composantes horizontale et verticale de vitesse  $u$  et  $w$  comme :

$$\begin{cases} v_t = \vec{V} \cdot \vec{t} = u \cos \alpha + w \sin \alpha, \\ v_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = -u \sin \alpha + w \cos \alpha. \end{cases}$$

Le long de l'interface les conditions sur la vitesse deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} = 1 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (2.2.13)$$

le long de la paroi inclinée :

$$v_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} v_t \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{et} \quad v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} v_n \cdot \vec{t} = 0. \quad (2.2.14)$$

Dans un premier temps, les conditions sur la vitesse le long de la paroi solide peuvent être développées pour arriver au système :

$$\vec{\nabla} v_t \cdot \vec{t} = \cos^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.2.15)$$

$$\vec{\nabla} v_n \cdot \vec{t} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial x} - \sin^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.2.16)$$

qui comporte quatre inconnues pour deux équations. Au point triple la relation :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.2.17)$$

qui provient de la non déformabilité de l'interface, permet de réduire le nombre d'inconnues à trois. En considérant le fluide comme incompressible (ce qui est tout à fait raisonnable dans l'approximation de Stokes) la contrainte de divergence nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.2.18)$$

permet de ramener le nombre d'inconnues à deux. Après quelques simplifications le système peut être transformé en :

$$\sin 2\alpha \frac{\partial u}{\partial z} = -2 \cos 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.2.19)$$

$$\sin^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = -2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.2.20)$$

qui s'applique à la jonction et ne peut être vérifié pour tout  $\alpha$  que si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}$  s'annulent dans le coin. La condition de Marangoni est donc contredite puisqu'elle impose que  $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ . La singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires découle de l'incompatibilité des conditions aux limites s'appliquant le long de la paroi solide avec la condition de Marangoni lorsque l'on se

place au point de jonction. De surcroît cette incompatibilité persiste quelque soit l'angle formé à la jonction ce qui montre que la singularité est intrinsèquement liée à la modélisation des frontières.

*Solution du problème de Stokes :*

De même que pour les deux cas précédents, il est possible d'obtenir une solution analytique de l'écoulement de Stokes au voisinage de la jonction, en utilisant le traitement analytique de Moffatt [104]. La solution recherchée, exprimée en coordonnées polaires, est, comme pour la spatule et la ligne de contact mobile, de la forme  $\psi = r^n f(\theta)$  vérifiant  $\nabla^4 \psi = 0$ . Cette fois-ci, c'est la condition de Marangoni sur la contrainte tangentielle qui fixe  $n$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \tau = 1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (2.2.21)$$

Il est par conséquent nécessaire que  $n$  soit égal à 2 pour que (2.2.21) puisse être vérifiée pour tout  $r$ . La partie de la fonction de courant dépendant de  $\theta$  est différente de celle des deux cas précédents (spatule, ligne triple) .

$$\psi = r^2 (A\theta \cos \theta + B\theta \sin \theta + C\theta + D). \quad (2.2.22)$$

Les conditions aux limites pour la vitesse (voir fig. 2.3) fournissent les conditions sur  $f$  :

$$f(0) = 0, \quad f(-\alpha) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(-\alpha) = \tau = 1, \quad (2.2.23)$$

qui permettent de déterminer  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ <sup>(4)</sup>. La fonction de courant s'écrit alors :

$$\psi = -\frac{r^2}{4} \frac{(\cos 2\theta - 1)(\sin 2\alpha - 2\alpha) + (\cos 2\alpha - 1)(\sin 2\theta - 2\theta)}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}. \quad (2.2.24)$$

Il en découle que les vitesses varient comme la distance au coin :  $v_r \propto r$  et  $v_\theta \propto r$ , ce qui leur permet de s'annuler à la jonction. Comme dans l'article de Canright [22] se limitant au cas  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , il est intéressant de calculer le rotationnel de la vitesse  $\omega$  et la pression. Le premier s'avère ne pas dépendre de  $r$  :

$$\omega = -\frac{(\sin 2\alpha - 2\alpha) + 2\theta(\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}, \quad (2.2.25)$$

et vaut -1 en  $\theta = -\alpha$ . De plus, en  $r = 0$ , la vorticité est multivaluée, ce qui confirme la discussion précédente sur le changement de signe de la vorticité à la jonction. Pour sa part, la pression varie en  $\ln r$  :

$$p - p_0 = \frac{2(\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \ln r. \quad (2.2.26)$$

---

4.  $A = -\frac{1}{4} \frac{\sin 2\alpha - 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}$ ,  $B = -\frac{1}{4} \frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}$ ,  $C = \frac{1}{4} \frac{2(\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}$  et  $D = \frac{1}{4} \frac{\sin 2\alpha - 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}$ .

La singularité de vorticité se répercute sur le champ de pression qui est lui aussi singulier. La pression tend vers  $-\infty$  dans le coin ce qui met en évidence une autre inconsistance du modèle. De même que pour la ligne de contact mobile, pour laquelle la pression tendait vers  $+\infty$ , il semble que l'écoulement ait une influence non négligeable sur l'angle formé par l'interface et le solide. Le problème des écoulements thermocapillaires peut ainsi être repensé, par analogie avec la ligne de contact mobile, comme un problème d'angle de contact dynamique où la ligne triple est fixe et la variation de l'angle de contact résulte de l'écoulement à l'interface. Un autre problème important vient de la rétroaction entre le gradient thermique et l'écoulement. En effet pour pouvoir appliquer l'équation de Stokes il faut que le gradient thermique soit constant. Or l'écoulement convecte le champ de température et accroît le gradient thermique ce qui a pour effet d'intensifier la convection (Kasperski et Labrosse [86]). Les tentatives de prévoir analytiquement l'ordre de grandeur de l'échelle à laquelle s'effectue l'écoulement de Stokes reposent toutes sur des hypothèses fortes qui ne sont pas nécessairement vérifiées dans le cas général (Canright [22], Zebib *et al.* [151]). Comme dans le cas de la ligne triple les échelles globale et locale sont couplées.

Les difficultés de la description des écoulements thermocapillaires confinés résident dans :

- la singularité de vorticité présente à la jonction solide fluide quelque soit l'angle de contact. La description classique basée sur le modèle de milieu continu comporte une pression localement infinie à la jonction.
- la rétroaction entre les échelles thermique et visqueuse qui interdit la connaissance a priori de la taille caractéristique où l'approximation de Stokes s'appliquerait.
- cette rétroaction entre écoulement et échelle thermique est couplée à une dépendance de l'angle de contact au champ de vitesse d'une manière analogue au cas de la ligne de contact mobile bien que le point triple soit ici fixe.

## 2.3 Traitement numérique des singularités

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes repose sur la capacité d'une méthode donnée à fournir une solution approchée du problème ainsi que sur le contrôle de l'erreur introduite dans le processus d'approximation. Les équations continues sont remplacées par une approximation discrète en espace et en temps adaptée au calcul numérique et qui doit être convergente. La vitesse de convergence du problème discret vers le problème continu est caractérisée par l'ordre de la méthode. Il s'agit de l'erreur introduite par la discrétisation évaluée en fonction de sa dépendance aux pas d'espace  $\Delta x$  et de temps  $\Delta t$ . Une méthode d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace doit voir l'écart de la solution calculée par l'approximation numérique à la solution analytique du problème continu décroître comme  $(\Delta x)^4$  en espace et  $(\Delta t)^2$  en temps. Des conditions aux limites incompatibles vont conduire à une détérioration de l'ordre de la méthode de résolution et nécessitent donc un traitement adapté.

### 2.3.1 Le filtrage des singularités

Les méthodes de précision finie sont souvent perçues comme mieux adaptées que les méthodes spectrales au traitement de problèmes comportant des singularités. Parmi les premières, les méthodes de volumes finis et d'éléments finis ont l'avantage d'être basées sur une formulation intégrale des équations de Navier-Stokes. Ceci permet de descendre d'un ordre différentiel les dérivées spatiales et atténue la sensibilité de l'approximation numérique à la présence de singularités. Pour revenir à des caractéristiques communes, les méthodes de précision finie sont basées sur des approximations locales des différents termes intervenant dans la formulation (locale ou intégrale) des équations de Navier-Stokes, qu'il s'agisse d'intégrales sur des volumes de contrôle ou de dérivées de la solution. Le caractère local de l'approximation discrète conduit souvent à une dissipation numérique de la solution. Lorsqu'une singularité existe, la solution numérique n'est sensible que localement à la présence de celle-ci. Une singularité se traduit par la présence d'échelles de longueurs infiniment petites au lieu de la discontinuité, lesquelles sont filtrées par le schéma numérique, ainsi la solution n'est dégradée que localement.

Les méthodes spectrales peuvent être vues comme la généralisation de la décomposition en série de Fourier à des fonctions non-périodiques sur un domaine d'extension finie (Polynômes de Chebyshev), semi-infinie ou infinie. Les approximations de fonctions discontinues par des séries de Fourier sont soumises au phénomène de Gibbs. Elles présentent des oscillations parasites aux voisinage de la discontinuité. De même, si une singularité est présente dans les équations de Navier-Stokes, l'approximation spectrale de la solution sera polluée par le phénomène de Gibbs. La vitesse de convergence s'en trouve également dégradée : l'approximation spectrale d'une fonction comportant une discontinuité sur sa dérivée  $k^{\text{ième}}$  ne convergera plus en  $(\Delta x)^{N_x}$  mais sera limitée à l'ordre  $k$ . Un autre inconvénient vient de ce que contrairement aux méthodes de précision finie, les approximations spectrales font intervenir tous les points de discrétisation pour représenter les équations en un point. Ce caractère global tend à propager les erreurs à l'ensemble du domaine de calcul. Lorsqu'une singularité est présente, la solution numérique est polluée par le phénomène de Gibbs sur tout le domaine. Ceci explique pourquoi il est souvent avancé que les méthodes spectrales sont inadaptées au traitement des problèmes singuliers. Toutefois l'amplitude des oscillations parasites décroît en s'éloignant de la singularité, le taux de décroissance augmentant avec le nombre de modes utilisés pour représenter la solution, donc avec le nombre de points de collocation. Le remède le plus couramment utilisé consiste à introduire un filtrage explicite de la singularité. Les conditions aux limites sont rendues compatibles en pondérant l'une des conditions de frontière par une fonction régulière qui va lever localement la contradiction et laissera la condition inchangée loin du point singulier. Cette fonction est choisie de manière à pouvoir contrôler la longueur de filtrage ce qui introduit un paramètre non-physique. Par exemple, si dans un domaine carré  $(x, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  les conditions de frontière sont  $u = 1$  en  $(x, z = 1)$  et zéro ailleurs, le filtre utilisé pourra être  $f_n(x) = 1 - x^{2n}$  qui rétablit la compatibilité des conditions de frontière en  $(x = \pm 1, z = 1)$ , est  $C^\infty$  quelque soit la valeur de  $n$  et tend vers la fonction créneau quand  $n$  tend vers l'infini. Pour une valeur donnée de  $n$ , la précision spectrale de l'approximation est rétablie. Le filtrage explicite fait apparaître une deuxième convergence en plus de la convergence spatiale. Le problème

singulier est remplacé par une suite de problèmes réguliers qui tendent vers le problème singulier lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi il devient non seulement nécessaire de s'assurer que la solution est bien convergée avec le maillage à  $n$  fixé mais aussi lorsque  $n$  varie.

Au final, les méthodes classiques de résolutions numériques d'un problème singulier reposent toutes sur un certain filtrage de la singularité. Dans le cas des méthodes de précision finie celui-ci est implicite et dépend de la résolution spatiale utilisée dans les calculs. L'emploi des méthodes spectrales nécessite l'emploi d'un filtre défini explicitement introduisant un paramètre supplémentaire indépendant de la discrétisation spatiale. Enfin l'emploi des différences finies peut dans certains cas nécessiter l'emploi d'un filtrage explicite des discontinuités cumulé à la dissipation intrinsèque à ces méthodes. Dans le cas des écoulements thermocapillaires en pont liquide chauffé latéralement, Martin Witkowski et Walker [101] ont introduit une régularisation explicite pour pouvoir effectuer certains de leurs calculs, lorsqu'ils se placent à un nombre de Prandtl égal à 4. Quand ce paramètre est supérieur à 1, la diffusion thermique est dominée par les effets inertiels, ce qui entraîne un resserrement important des isothermes le long de la surface libre au voisinage des parois froides. Ces petites échelles thermiques nécessitent alors de raffiner fortement le maillage pour converger vers la solution. Lorsque le maillage devient assez fin, leur code en différences finies n'a pu produire de solution numérique sans l'utilisation d'un filtrage explicite.

### 2.3.2 Principe de Saint-Venant

Quelle que soit la méthode utilisée, la question de la validité d'une solution filtrée pose un problème. Pour pouvoir affirmer que la solution numérique converge vers la solution analytique du problème singulier, il est nécessaire de vérifier que le problème filtré converge de manière satisfaisante vers le problème singulier. Le filtrage étant choisi de manière à rendre le problème régulier, il est vain de s'attendre à une convergence de la solution numérique sur tout le domaine de calcul. En effet une suite de fonctions continues ne converge pas uniformément vers une fonction discontinue. Au mieux, il est légitime de s'attendre à ce que la solution numérique converge vers la solution analytique avec la diminution de l'échelle de filtrage sauf dans un voisinage restreint de la singularité fixé par l'échelle de filtrage. Ceci est suffisant pour pouvoir utiliser la solution numérique filtrée. Une formulation de cette hypothèse en des termes plus pratiques est qu'à partir d'une certaine localisation du voisinage, le filtrage n'a pas ou quasiment pas d'influence sur les écoulements en dehors de ce voisinage. Vérifier cette hypothèse revient à chercher un équivalent pour les fluides du principe de Saint-Venant très utilisé en mécanique des solides.

Un énoncé du principe de Saint-Venant tiré de "*Élasticité linéaire*" de Solomon [137] est le suivant :

*"un système de forces statiquement équivalent à zéro appliqué sur une portion de la frontière, de diamètre comparable avec la plus petite des dimensions du corps, produit des déplacements, déformations et tensions appréciables seulement à des distances comparables avec le dit diamètre".*

Selon l'article de revue de Karp [85], la première formulation par Saint-Venant de son hypo-

thèse remonterait à 1856 [124]. Dans un premier temps, ce principe a été l'objet de vérifications expérimentales dont un certain nombre sont données en référence dans Solomon [137]. L'article de Knowles [89] semble fournir une démonstration du principe. Une revue des travaux les plus récents est effectuée par Horgan [73]. Enfin, un exemple d'utilisation courant se rencontre dans les mesures de coefficients d'élasticité des matériaux solides qui reposent sur l'utilisation du principe de Saint-Venant pour le calcul des efforts exercés sur les échantillons.

L'application du principe de Saint-Venant aux fluides passe par l'analogie entre les équations de Stokes pour les fluides visqueux et les équations de l'élasticité linéaire pour les solides qui possèdent le même opérateur. Cette analogie est par exemple évoquée par Horgan [74]. Pour pouvoir appliquer le principe de Saint-Venant aux écoulements singuliers, il est nécessaire de considérer un voisinage restreint du point de discontinuité tel que les effets inertiels soient négligeables dans ce domaine. Le problème est localement un problème de Stokes. Selon l'énoncé du principe de Saint-Venant, il faudrait alors, dans un sous-domaine suffisamment petit autour du point singulier, remplacer les conditions aux limites incompatibles par d'autres conditions compatibles dont la somme des forces et des moments résultants intégrés le long de ce sous-domaine soient équivalents. Dans le cas de la cavité entraînée, la singularité résulte en une contrainte non-intégrable au point de jonction ce qui rend le principe non applicable. Pour les écoulements thermocapillaires, l'échelle de longueur du sous-domaine ne peut être évaluée car la rétroaction entre l'écoulement et les échelles thermiques rendent cette analyse impossible ou trop difficile (Kasperski et Labrosse [86]). Dans chacun de ces deux cas il faut se contenter de filtrer la singularité sur une échelle de longueur imposée de manière arbitraire et vérifier que la solution numérique converge bien en même temps que l'on fait tendre l'échelle de filtrage vers 0.

### 2.3.3 Soustraction de singularité

Une approche alternative au filtrage de la singularité a été développée dans le cadre des méthodes spectrales et consiste à soustraire la partie singulière de l'écoulement pour ne calculer que la partie régulière. La convergence exponentielle de la solution numérique est alors retrouvée. Ce type de traitement a été introduit par Schultz *et al.* [126] dans le cas de la cavité entraînée et appliqué au problème de l'injection d'un fluide dans un cylindre par Botella [16]. Le calcul de la solution numérique nécessite la connaissance de l'écoulement singulier au voisinage de la singularité qui, dans le cas de la cavité entraînée, est donnée par les travaux de Dean et Montagnon [38], Taylor [140], Moffatt [104] pour un écoulement de Stokes. D'autres travaux parviennent à donner une solution asymptotique de l'écoulement en régime inertiel (équations de Navier-Stokes) à une vitesse modérée (Gupta *et al.* [61]) et à une vitesse arbitraire (Hancock *et al.* [64]).

Cette approche revêt un intérêt tout particulier lorsqu'elle s'applique au problème de la cavité entraînée. Cet écoulement est très souvent utilisé pour valider un nouveau code de calcul, ainsi les résultats de Botella et Peyret [15] obtenus par des méthodes spectrales Chebyshev associées à la soustraction de la singularité fournissent des résultats d'une très grande précision pouvant servir de référence. Un autre intérêt réside dans la détermination précise des seuils de

transition des écoulements des états stationnaires vers les états instationnaires pouvant encore une fois servir de référence (Auteri *et al.* [5]).

Un inconvénient majeur de ce type d'approches réside dans la nécessité de connaître une solution asymptotique de l'écoulement au voisinage de la singularité. Tout d'abord une telle solution n'est pas toujours connue, par exemple dans le cas des écoulements thermocapillaires confinés, l'échelle à laquelle la solution asymptotique s'applique n'est pas connue et sa détermination est un problème ardu qui reste sans réponse. La ligne de contact mobile pose le même type de problème car le profil de l'interface est déterminé par l'angle de contact qui dépend de l'écoulement lequel dépend du profil de l'interface. Enfin, les solutions asymptotiques évoquées plus haut sont données dans le cas de problèmes bidimensionnels. Leur obtention est déjà une tâche d'une certaine difficulté. Le calcul de telles solutions pour les écoulements tridimensionnels constitue un problème bien plus ardu comme le montrent les résultats de Shankar et Deshpande [130], Hills et Moffatt [66], Gomilko *et al.* [56]. La soustraction de la singularité en 3 dimensions est donc une approche d'autant plus complexe et probablement d'un coût assez élevé en puissance de calcul ce qui risque d'en faire une méthode a priori peu avantageuse.

Si les traitements numériques discutés dans cette section permettent le calcul de solutions approchées s'accordant avec le modèle singulier, ils ne sont pas en mesure de répondre aux principales questions soulevées en section 2.1. La présence de discontinuités dans les conditions de frontière d'un modèle de milieu continu pose un problème profond quant à la validité du modèle utilisé. Ni le filtrage, ni la soustraction de singularité ne proposent de remède aux inconsistances physiques décelées en section 2.2. Dans le cas du filtrage, elles introduisent un paramètre non physique lié à l'échelle de filtrage sans pouvoir ni prédire ni expliquer l'ordre de grandeur de cette échelle de filtrage.

## 2.4 Traitement physique des singularités

Les discussions des sections précédentes ont fait apparaître la nécessité d'améliorer la modélisation macroscopique basée sur une description du type milieu continu d'un certain nombre de problèmes académiques comportant des singularités de vitesse. La connaissance de l'échelle à laquelle le modèle de milieu continu doit être modifié passe par une nouvelle formulation des conditions de frontière à même de rendre compte à l'échelle macroscopique des effets locaux susceptibles de rendre la physique régulière. Parmi les trois familles d'écoulements singuliers évoquées, la ligne de contact mobile a fait l'objet de nombreux travaux. Or il a été montré dans la section 2.2 que des analogies existent entre celle-ci et le problème de la spatule : contrainte infinie au point singulier, ou des écoulements thermocapillaires confinés : interdépendance des échelles locale et globale de l'écoulement. Une revue de la littérature de la ligne de contact mobile est effectuée dans le but d'identifier les résultats susceptibles de s'appliquer aux autres cas.



### 2.4.1 État de l'art de la ligne de contact mobile

Le problème de la ligne de contact mobile est l'extension à l'étude dynamique des problèmes d'angle de contact statique. Les phénomènes capillaires relevant du mouillage statique, comme l'angle de contact à l'équilibre et la montée d'un liquide dans un tube capillaire, sont assez bien compris depuis 1870 (formule de Young-Dupré, formule de Laplace, loi de Jurin ; voir Rowlinson et Widom [122, pp. 1-24]). La description théorique de l'angle de contact dynamique, lorsque la ligne triple est en mouvement, est au contraire encore un problème ouvert. Malgré de nombreux efforts, la manière dont la ligne de contact se déplace reste mal comprise.

La difficulté la plus immédiate tient dans l'apparente impossibilité de mettre la ligne triple en mouvement. Les modèles basés sur une approche continue classique du phénomène (voir section 2.2.2) se traduisent par l'existence d'une contrainte infinie s'exerçant le long du solide (Moffatt [104], Huh et Scriven [77], Dussan et Davis [43]). L'autre difficulté est la prédiction de l'angle de contact dynamique qui dépend de la vitesse de déplacement de la ligne triple. Obtenir une prédiction de l'angle de contact dynamique est nécessaire à la description hydrodynamique du mouvement et est d'autant plus difficile que les échelles locale et globale sont couplées. En effet, le domaine dont dépend l'écoulement est défini par le profil d'interface qui nécessite la donnée de l'angle de contact pour être connu. D'autre part, selon Blake *et al.* [13], l'écoulement peut avoir, à son tour, une influence sur l'angle de contact.

Parmi les premiers travaux théoriques l'article de Dussan [42] a souligné la nécessité d'une meilleure compréhension de la nature physique de l'interface fluide/fluide ainsi que de la ligne triple. Les notions de surface matérielle et surface limite ont été introduites et leurs différences discutées. Ainsi la première est composée des mêmes particules de fluide à chaque instant tandis que les particules de fluide peuvent quitter et rejoindre la seconde sans pour autant enfreindre la condition de flux nul.

Comme montré en section 2.2 le saut de vitesse à la ligne triple est très similaire à celui du problème de la spatule de Taylor [140]. Dans ce cadre, Taylor a été le premier à montrer que le modèle hydrodynamique basé sur l'approximation de milieu continu n'est pas consistante du point de vue physique. La singularité de vitesse se traduit par une contrainte infinie au point de jonction et une force infinie le long du mur. Il serait donc impossible de mettre le fluide en mouvement et pourtant la spatule du peintre déplace le fluide.

En négligeant le fait que, pour la ligne de contact mobile, le profil de l'interface fluide/fluide n'est pas imposé mais résulte plutôt de l'influence réciproque de l'écoulement et de l'angle de contact, il est possible d'appliquer le raisonnement de Taylor et de conclure que les mêmes inconsistances physiques sont présentes dans les deux modèles qui se basent uniquement sur des considérations hydrodynamiques et la prise en compte des forces capillaires exprimées à l'échelle macroscopique (loi de Laplace). Le besoin d'un modèle décrivant la physique de manière satisfaisante est encore plus évident dans ce cas, étant donné la grande variété de processus comportant une ligne triple en mouvement.

Les premières tentatives d'amélioration de la modélisation consistèrent à autoriser le glissement partiel du fluide sur les parois solides au voisinage de la ligne de contact (Huh et Scriven [77], Dussan [42], Hocking [71]). Bien que l'origine microscopique de la condition de glissement

ne soit pas clairement identifiée, cette approche a mis en évidence le besoin de faire apparaître au moins trois échelles de longueurs distinctes auxquelles correspondent des modélisations différentes du comportement du fluide (Hocking et Rivers [70]). L'échelle la plus fine se rapporte à des distances de l'ordre de quelques diamètres moléculaires au voisinage de la ligne de contact et est désignée comme la zone intérieure. La zone extérieure fait référence aux échelles de l'ordre de la longueur caractéristique de l'écoulement. La dernière région se situe à une échelle comprise entre les deux précédentes et est appelée la zone intermédiaire.

La zone interne est l'échelle à laquelle l'hypothèse de milieu continu doit être remise en question et la dynamique des molécules du fluide prise en compte pour que la contrainte associée au mouvement de la ligne de contact soit finie. La zone externe est l'échelle à laquelle la formulation continue est valide et le mouvement du fluide décrit par les équations de Navier-Stokes. La zone intermédiaire permet d'assurer la transition entre les forces d'origine moléculaire et hydrodynamique en prenant en compte l'influence des deux sur le fluide.

Lorsque le seul effet microscopique pris en compte au voisinage de la ligne triple est un glissement du fluide de type Navier (voir Goldstein [55]) sur la paroi solide, il a été montré par Huh et Mason [76] que la contrainte tangentielle et le champ de pression varient comme  $\ln r$ ,  $r$  étant la distance à la ligne triple. La contrainte devient alors intégrable bien qu'étant localement infinie, ce qui lève le caractère non physique du modèle de ligne triple. Selon Durbin [41], la singularité de pression est due à la présence d'une discontinuité de contrainte tangentielle le long du solide située au point triple en raison du changement de milieu (liquide/gaz). La possibilité d'une longueur de glissement dépendant de la vitesse du fluide a été étudiée par Jansons [82]. Afin de lever également la singularité de pression à la ligne triple, il est possible, en plus du glissement, d'inclure la dynamique de l'interface dans les effets locaux susceptibles d'altérer le champ de vitesse au voisinage du point triple (Shikhmurzaev [135, 136, 134, 133]). Récemment, la consistance mathématique de ce modèle a été montrée par Monnier et Witomski [105].

Pismen et Nir [114] ont montré que le caractère non-physique de la contrainte pouvait aussi être attribué à l'hypothèse d'interface plane utilisée par Huh et Scriven [77]. Le calcul du profil d'interface autorisant l'équilibre des contraintes normales leur permet de rendre la contrainte intégrable bien que la pression et la contrainte visqueuse restent singulières à la ligne de contact. Le profil de vitesse obtenu par cette méthode est nécessairement tangent à la surface solide, l'angle à l'infini étant une condition limite fixant un profil parmi la famille de solutions. Un autre inconvénient de cette approche est de ne pas être applicable au cas d'un liquide déplaçant un gaz de viscosité négligeable. Cox [34], par une formulation plus générale du problème, retrouve les résultats de Hocking et Rivers [70] et montre quels régimes d'écoulement nécessitent la prise en compte de deux (Hocking [71]) ou trois zones (Hocking et Rivers [70]) d'échelles distinctes. Dans ce dernier cas, il identifie la zone intermédiaire à la solution de Pismen et Nir [114] et montre que le profil d'interface est déterminé par les conditions de raccordement. Les expériences de Fermigier [46] ont montré la validité de ces calculs.

L'échelle à laquelle le glissement intervient dans l'écoulement et lève la singularité est évaluée à quelques diamètres moléculaires. À ces distances, les forces moléculaires deviennent suffisamment importantes pour être prises en compte et peuvent être prépondérantes sur le glissement. Dans le cas des faibles angles de contact et sous l'hypothèse d'un écoulement de lubrification,

de Gennes *et al.* [52] ont montré la possibilité de régulariser l'écoulement par la prise en compte des forces de Van der Waals dans une zone très proche de la ligne de contact. Leur approche fait intervenir quatre échelles de longueurs. Un certain nombre de résultats sur la prise en compte des forces moléculaire a été produit par Hocking [69, 68, 67]. L'extension à la prise en compte d'un film précurseur a été étudiée par Pismen *et al.* [112]. Dans le cas où la ligne triple est formée par un liquide proche du point critique en contact avec sa phase gazeuse, une approche similaire a été introduite par Andrieu *et al.* [2]. Une interprétation du glissement basée sur des considérations moléculaires a été introduite par Ruckenstein [123]. Le sens donné au paramètre de glissement diffère de celui associé à la condition de Navier. Une tentative de décrire l'angle de contact dynamique par la prise en compte de ce type de glissement, associé à la prise en compte des forces de van der Waals, a été faite par Pismen et Rubinstein [111].

Le comportement microscopique du fluide au voisinage du point triple a aussi été étudié par des simulations numériques de dynamique moléculaire (D.M.). Il a été montré qu'un glissement effectif existe au voisinage de la ligne de contact (Koplik *et al.* [94], Thompson et Robbins [143]). La puissance de calcul des ordinateurs actuels limite les approches moléculaires à des nombres de particules ne permettant pas la comparaison avec les expériences. L'emploi de méthodes permettant le couplage entre D.M. et équations de Navier-Stokes serait nécessaire.

D'autres auteurs ont considéré la possibilité que le liquide adopte un comportement non-newtonien au voisinage de la ligne triple (Weidner et Schwartz [150]). Il a été montré qu'un liquide rhéofluidifiant voit sa contrainte devenir intégrable. Carré et Woehl [25] ont effectué des vérifications expérimentales de leur modèle. Gouin [58] parvient à une relation décrivant l'angle de contact dynamique. La caractéristique commune de ces travaux est que le caractère non-newtonien intervient à partir d'un certain seuil de contrainte, ce qui le limite à jouer un rôle dans le voisinage de la ligne triple. Ceci n'est pas sans rappeler l'approche de Cox [34] qui introduit un glissement au voisinage de la ligne triple où la contrainte devient importante.

Une autre théorie intéressante pour l'étude de la ligne de contact mobile est le modèle d'interface diffuse de van der Waals [148] étendu par Cahn et Hilliard [21] qui, contrairement aux travaux de Bedeaux *et al.* [12], Bedeaux et Oppenheim [11] basés sur la théorie de Gibbs, décrit l'interface comme une zone de transition continue d'une phase ou d'une espèce vers une autre à une échelle moléculaire. L'interaction d'une interface diffuse avec la description hydrodynamique des écoulements a été introduite par Seppecher [129, 128]. Des simulations numériques en différences finies du problème de la ligne de contact tenant compte de la nature diffuse de l'interface ont été menées par Jacqmin [78]. Cette dernière étude a montré que l'interface peut se déplacer par diffusion sous l'effet du potentiel chimique sans que le glissement intervienne. Dans le cas d'un liquide en contact avec sa vapeur, Pomeau [118] a interprété cet effet comme de l'évaporation et de la condensation. Enfin, Pismen et Pomeau [113] ont utilisé les interfaces diffuses pour introduire les forces de van der Waals telles que la pression de disjonction dans la description du mouvement de la ligne triple.

Toutes les approches utilisées pour lever la singularité de vitesse de la ligne de contact mobile ont en commun la prise en compte d'effets microscopiques, habituellement négligés aux échelles macroscopiques, liées à la description hydrodynamique du mouvement. Ce travail de thèse étant basé sur une formulation spectrale des équations de Navier-Stokes, une approche

relativement peu coûteuse et immédiate consiste à modifier les conditions aux limites, c'est pourquoi les approches non-newtoniennes ainsi que les interfaces diffuses seront écartées. La modélisation des écoulements thermocapillaires confinés sera donc susceptible d'être associée à la prise en compte de glissement aux parois solides (conditions de Navier) et à la prise en compte d'une modification des forces de surface liée à la dynamique de l'écoulement (approche semblable à celle de Shikhmurzaev). Le glissement pourra aussi être utilisé pour le traitement du problème de la spatule.

## 2.4.2 Le glissement

### 2.4.2.1 État de l'art

Lorsqu'un fluide réel est en contact avec une paroi solide, l'hypothèse habituellement adoptée est que le fluide vérifie la condition de non-glissement : la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi. Cette condition a été confirmée par de nombreuses expériences et son efficacité est avérée : elle permet de décrire correctement de nombreux problèmes. Ceux-ci étant aujourd'hui utilisés pour l'enseignement de la mécanique des fluides, elle est devenue un fait. Cependant, comme discuté par Goldstein [55], alors que l'équation décrivant le mouvement d'un fluide avait déjà été posée dans sa forme actuelle, la condition de frontière appropriée à la modélisation du contact entre un fluide et un solide était encore un sujet de débat. Au lieu de l'adhérence, Navier obtint, par la même méthode qui lui servit à formuler l'équation du mouvement, une condition de glissement pour les fluides visqueux qui impose que le glissement du fluide à la paroi solide soit limité par une contrainte de cisaillement sur les couches internes du fluide. Cette condition, qui explicité par la suite, fait apparaître une longueur, notée  $b$ , proportionnelle à l'amplitude du glissement. À la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, les expériences de Coulomb, montrèrent parmi d'autres, qu'un fluide adhère aux parois solides et les conditions de glissement furent progressivement abandonnées. Néanmoins ces expériences ne disposaient pas d'une finesse de résolution suffisante pour affirmer que ceci est toujours vrai aux échelles microscopiques. D'une manière surprenante, cet argument est avancé dès le début du siècle dernier par Marcel Brillouin [19], qui postule que les longueurs de glissements sont généralement très faibles et propose d'étudier l'écoulement dans des capillaires pour le vérifier.

Il faut attendre la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle pour que les expériences de Tolstoi [144], puis de Schnell [125] mettent en évidence un glissement dans des tubes capillaires. Plus récemment, les expériences de Churaev *et al.* [31] ont montré que le glissement doit être introduit dans la description du mouvement de l'eau dans des capillaires rendus hydrophobes afin de retrouver la valeur correcte de la viscosité de l'eau.

La section précédente a montré que le glissement peut avoir une importance cruciale dans la compréhension du déplacement de la ligne de contact. Celui-ci peut aussi intervenir dans les procédés d'extraction de polymères pour lesquels il existe un grand nombre d'instabilités conduisant à des régimes variés (voir la revue de Denn [39]) et où il a été montré que le glissement joue sur le passage d'un régime à un autre. Enfin, dans le cas de micro-canaux de l'ordre de 300 micro-mètres, Tretheway et Meinhart [145] ont montré que le glissement n'est

pas négligeable.

Les premières études théoriques pour expliquer la présence d'un glissement concernent le cas de la ligne de contact mobile dans lequel Hocking [72] montre comment le glissement pourrait être expliqué par la rugosité de la surface solide à l'échelle microscopique. Ceci se traduit, selon lui, par un mouvement périodique de la ligne de contact dont le glissement rend compte à l'échelle macroscopique. Toutefois, l'étude antérieure de Richardson [121] discute de la validité de la condition de non-glissement et montre que même un fluide parfait peut sembler adhérer à une paroi solide à l'échelle macroscopique si celle-ci est rugueuse à l'échelle microscopique.

Les articles de Thompson et Robbins [143] et Koplik *et al.* [93] montrent l'existence d'un glissement en dynamique moléculaire. L'article de Thompson et Robbins [142] révèle aussi qu'aux échelles microscopiques un fluide stratifie au voisinage de la paroi solide, ce qui peut avoir une influence sur la viscosité du liquide proche de la paroi. L'article de Thompson et Troian [141] montre que, sous de très fortes contraintes, le glissement devient non linéaire et l'intensité du glissement dépend alors de la contrainte.

L'écart entre les expériences et la théorie est un des principaux problèmes que tentent d'éclaircir les travaux actuels. Barrat et Bocquet [8] obtiennent théoriquement l'ordre de grandeur de la longueur de glissement,  $b$ , par des considérations statistiques, soit quelques dizaines de nanomètres. L'expression obtenue fait intervenir l'angle de contact c'est-à-dire l'énergie d'interaction entre le liquide et le solide, ce qui indique que le glissement est une caractéristique physique des composants du système étudié. Pour les écoulements dans des tuyaux, Watanabe *et al.* [149] trouvent que la force de frottement est réduite si les conduites sont hydrophobes. Les expériences de Pit [116], Pit *et al.* [115] basées sur des mesures optiques, mettent en avant une longueur de glissement de l'ordre de 500 nanomètres pour les fluides simples. Cette valeur est confirmée par les expériences de Cottin-Bizonne *et al.* [33], menées à l'aide d'un appareil à force de surface, qui montrent que le glissement dépend effectivement du mouillage : un liquide ne mouillant pas une surface aura une plus grande longueur de glissement. Ils mettent ainsi en évidence l'échec de la théorie à prévoir la longueur de glissement mesurée puisqu'il existe un écart d'un ou deux ordres de grandeur entre les deux. Les expériences de Horn *et al.* [75] montrent qu'un tel comportement est aussi observé pour les polymères et que la longueur de glissement dépend aussi du taux de cisaillement. Craig *et al.* [35] retrouvent la dépendance avec la viscosité du liquide prévue par la théorie de Navier et aussi une dépendance de la longueur de glissement avec le taux de cisaillement pour des liquides cette fois newtoniens. Toutefois vue l'intensité des contraintes que leur appareil est susceptible de fournir, l'origine de cette dépendance pourrait être liée à une interprétation erronée des mesures. L'influence de la rugosité de la surface utilisée pour la mesure est mise en évidence par Zhu et Grannick [152] qui retrouvent qu'une forte rugosité diminue le glissement.

Pour expliquer l'écart entre les expériences et la théorie, de Gennes [51] propose l'existence d'une couche gazeuse piégée entre le solide et le liquide et montre que ceci conduirait à une augmentation non négligeable du glissement. Cette hypothèse peut alors être associée aux observations expérimentales de Vinogradova *et al.* [147] qui montrent qu'une surface hydrophobe possède une densité plus élevée de micro-cavités gazeuses dans son voisinage qu'une surface hydrophile. Un scénario possible serait alors que ces micro-cavités sont piégées dans les rugosités

de la surface et augmentent le glissement existant pour une surface hydrophobe. Les expériences de Kim et Kim [88] montrent que les surfaces rendues rugueuses par des structures nanoscopiques permettent de réduire la résistance du fluide à l'écoulement. Les calculs en dynamique moléculaire de Cottin-Bizonne *et al.* [32] montrent qu'un micro-canal comportant des rugosités peut piéger du gaz entre le solide et le liquide et ainsi augmenter la longueur de glissement effective.

Le cas des gaz raréfiés doit être écarté des discussions précédentes. En effet il est connu qu'un glissement peut exister pour ceux-ci. Toutefois la situation est très différente de celle de l'écoulement d'un fluide dense. Le glissement intervenant pour l'écoulement d'un gaz raréfié dans une conduite est lié au fait que le libre parcours moyen des molécules de gaz est comparable ou supérieur à la dimension caractéristique de la conduite. Pour les liquides, ces considérations ne s'appliquent pas car le libre parcours moyen est de l'ordre du diamètre moléculaire. Le glissement des liquides est d'une nature différente de celui des gaz et nécessite un traitement approprié.

#### 2.4.2.2 Condition de Navier

La figure 2.5 résume la condition de glissement de Navier. Au voisinage d'une paroi solide un fluide de viscosité  $\mu$  en mouvement est supposé posséder une vitesse  $u_t$  différente de celle de la paroi au contact de celle-ci, mais dirigée suivant celle-ci. La vitesse relative du fluide par rapport à la vitesse  $U$  de la paroi est notée  $u_r$ . Le modèle de Navier postule que le glissement du fluide est limité par la friction des molécules sur la paroi solide. Cette friction se traduit par une force de rappel proportionnelle à la vitesse relative du fluide :  $f_r = k S u_r = k S (u_t - U)$ . En écrivant cette force par unité de surface :  $\frac{f_r}{S} = \mathcal{F}_r = k(u_t - U)$ , le principe de l'action et de la réaction s'applique en imposant qu'elle soit égale à la contrainte visqueuse à la paroi :  $\mathcal{F}_r = \sigma_f = \mu \vec{\nabla} u_r \cdot \vec{n}$ . Pour une paroi horizontale dont la normale est dirigée vers le haut, un fluide ayant une vitesse

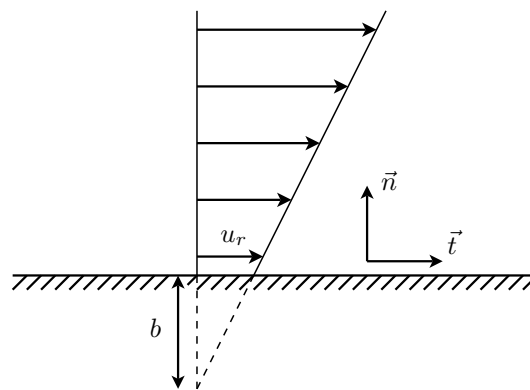


FIGURE 2.5 – Glissement de Navier.

relative positive augmentant en s'éloignant du mur et en considérant la vitesse du mur comme une constante, la contrainte visqueuse s'exprime comme :  $\mu \vec{\nabla} u_r \cdot \vec{n} = \mu \frac{\partial u_r}{\partial z} = \mu \frac{\partial u_t}{\partial z}$ . La condition

de Navier devient alors :

$$\mu \frac{\partial u_t}{\partial z} = k(u_t - U). \quad (2.4.1)$$

Pour simplifier la discussion la paroi peut être considérée au repos. Le rapport  $u_t / \frac{\partial u_t}{\partial z} = \frac{\mu}{k}$  a la dimension d'une longueur et définit la longueur caractéristique du glissement, notée  $b$ , associée au modèle de Navier. Cette longueur représente la distance de la paroi à laquelle la vitesse s'annulerait en considérant que celle-ci décroît linéairement avec une pente égale à  $\frac{\partial u_t}{\partial z}$ . Le coefficient de rappel  $k$  a la dimension d'une quantité de mouvement par unité de volume. Il quantifie les échanges de quantité de mouvement du fluide avec la paroi par le glissement partiel. Si dans la théorie de Navier cette constante a une signification physique limitée, Ruckenstein [123] en revanche, formule une condition de glissement cinétique équivalente basée sur des moyennes des interactions moléculaires. Dans ce contexte,  $k$ , est alors relié à la quantité de mouvement que doit avoir une molécule de fluide de l'intérieur pour pouvoir arracher une molécule piégée par le solide. Le rôle de la longueur  $b$  est dans tous les cas plus évident : un fluide parfait aura une longueur de glissement infinie, tandis que la condition d'adhérence sera obtenue en annulant  $b$ .

Comme discuté dans la section précédente, certaines études récentes en dynamique moléculaire (Thompson et Troian [141]) ainsi que des mesures avec un appareil à force de surface (Craig *et al.* [35]) ont montré que, pour des contraintes suffisamment élevées, la longueur de glissement dépend de la contrainte, c'est-à-dire que  $b$  est une fonction de  $\frac{\partial u_t}{\partial z}$ . La condition de Navier peut être généralisée en écrivant :

$$\frac{\partial u_t}{\partial z} = \left(b\left(\frac{\partial u_t}{\partial z}\right)\right)^{-1}(u_t - U). \quad (2.4.2)$$

La condition de Navier constitue l'approximation linéaire de la condition de glissement générale introduite par Thompson et Troian [141].

### 2.4.3 Viscosité d'interface

#### 2.4.3.1 État de l'art non exhaustif

La deuxième possibilité envisagée pour lever la singularité est de prendre en compte des corrections dynamiques à la tension de surface, d'une manière similaire à l'approche suggérée par Shikhmurzaev [135] qui repose sur la description thermodynamique hors-équilibre de Bedeaux *et al.* [12].

L'idée qu'une interface séparant deux fluides posséderait des propriétés rhéologiques distinctes de celles s'appliquant dans la masse des deux fluides est d'abord formulée par Plateau à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Boussinesq [18] reprend cette idée pour retrouver la vitesse de chute mesurée d'une goutte de mercure dans de l'huile de ricin, qui diffère de celle prévue par la théorie lorsque la dissipation de l'interface est négligée. Devant le succès de sa théorie, il formule les équations exprimant l'équilibre des contraintes dans une interface se comportant comme un fluide newtonien bidimensionnel pour une interface plane, cylindrique ou

sphérique qu'il traite comme des cas distincts. L'intérêt croissant pour les émulsions et les surfactants amène divers auteurs à reconsidérer les travaux de Boussinesq (Oldroyd [109], Linthion et Sutherland [99], Sternling et Scriven [138]). Enfin, Scriven [127] généralise la formulation de Boussinesq à une interface de géométrie arbitraire et montre le caractère intrinsèque de la viscosité interfaciale pour un fluide newtonien en retrouvant les équations obtenues par Boussinesq dans chacun des trois cas cités.

Bien que cette approche comporte des faiblesses dans la difficulté de justifier certaines hypothèses introduites par Boussinesq [18] afin d'introduire le caractère newtonien de l'interface, la nécessité de tenir compte de corrections dynamiques à la tension de surface d'un liquide demeure. Une formulation plus rigoureuse du bilan des forces dans une interface est obtenue par Bedeaux *et al.* [12] en se basant sur des considérations de thermodynamique hors-équilibre et le formalisme introduit par de Groot et Mazur [59]. Cette approche leur permet de retrouver les coefficients de viscosité interfaciale introduits arbitrairement dans la théorie de Boussinesq [18] plus d'autres coefficients liés à la courbure de l'interface. Cette formulation est appliquée par Bedeaux et Oppenheim [11] au cas des ondes capillaires pour fournir un cadre théorique utile à la mesure des coefficients de viscosité. Indépendamment, Goodrich [57] formule une théorie basée sur des arguments similaires mais qui tient compte de l'inhomogénéité de la densité dans la direction normale à l'interface (théorie de Gibbs des excès de surface). Cet argument conduit à introduire des coefficients de viscosité supplémentaires modifiant les bilans dans la direction normale, c'est-à-dire les contraintes qu'exercent réciproquement l'interface et l'intérieur du fluide. Une revue de la théorie et des mesures expérimentales dans le cas des surfactants est donnée par l'article de Langevin [95].

Toutes les discussions précédentes s'appliquent principalement aux monocouches à la surface d'un liquide, aux émulsions et en général à toutes les situations où des surfactants sont susceptibles de polluer une interface. Cependant, Vila *et al.* [146] montrent que les fluides purs peuvent aussi posséder une viscosité interfaciale. Ils utilisent les théories de Bedeaux et Oppenheim [11] et Goodrich [57] pour obtenir des valeurs des coefficients de viscosité interfaciale de l'eau et du mercure. Les travaux plus récents de Earnshaw et Hughes [44] montrent que les coefficients de viscosité interfaciale de l'eau sont très faibles. Ils émettent l'idée qu'il est nécessaire que les liaisons des molécules en surface soient suffisamment fortes pour qu'une interface ait une rhéologie distincte du fluide dans la masse, ce qui pourrait être le cas des liquides possédant une tension de surface très forte comme le mercure. Les expériences de Cardin *et al.* [24] mettent en évidence que la viscosité de l'interface séparant deux couches liquides peut avoir une influence sur la convection s'y développant. Ils montrent par une analyse de stabilité linéaire que la dissipation de l'interface peut être un mécanisme de sélection du type de convection lorsque les fluides sont chauffés par le bas. Les moteurs de l'écoulement peuvent alors être les forces de Marangoni ou la poussée d'Archimède. Ce travail constitue la motivation initiale des études numériques de Platten et Legros [117] qui concernent entre autres la convection de deux liquides superposés contenus par des parois solides et soumis à un chauffage par le bas.



### 2.4.3.2 Modes propres de réponse dynamique de l'interface

La prise en compte des effets de dissipation d'une interface est basée sur la constatation que les conditions d'équilibre des contraintes tangentielle et normale habituellement utilisées sont formulées pour des interfaces à l'équilibre statique. Ainsi la tension de surface est susceptible de varier si une interface est soumise à des déformations avant de revenir à sa valeur initiale une fois l'état de repos retrouvé. Ce processus est tout à fait similaire à celui qui intervient dans la dissipation visqueuse à l'intérieur du volume et permet de définir les coefficients de viscosité dynamique usuels. La viscosité est proportionnelle au temps mis par le fluide pour se réorganiser à la suite d'une perturbation de son état de repos. De la même manière, les coefficients de viscosité de surface seront d'autant plus grands que la surface tarde à retrouver un état de repos. Les coefficients de viscosité peuvent être associés aux différents modes de perturbation possibles du milieu. Ceci s'applique aux deux coefficients de viscosité usuels qui sont associés à la dilatation/compression d'un volume élémentaire de fluide et au cisaillement s'exerçant sur ses faces. Les fluides étant généralement considérés comme isotropes, un seul coefficient suffit pour chaque type de sollicitation. Dans le cas d'une surface, il convient de considérer trois modes de perturbation : la compression (fig. 2.6) et le cisaillement (fig. 2.7) qui ne changent pas le rayon de courbure de l'interface et la flexion de l'interface (fig. 2.8) associée aux perturbations dans la direction de la normale.

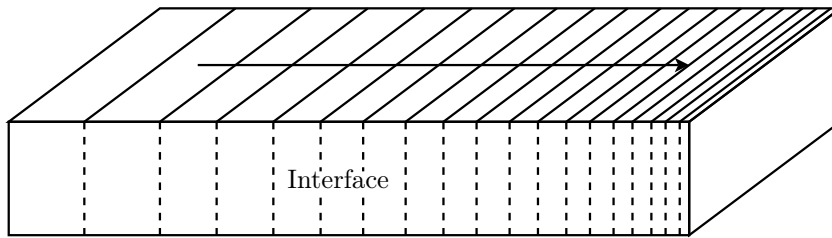


FIGURE 2.6 – Viscosité élongationnelle.

Le temps caractéristique associé aux perturbations longitudinales est lié au temps de diffusion des molécules de l'interface vers le volume et vice versa. Si les molécules quittent ou rejoignent facilement l'interface, la viscosité élongationnelle est faible. Ce qui explique pourquoi ce coefficient est a priori beaucoup faible pour les fluides simples que pour les surfactants : les molécules de surfactant peuvent ne pas être solubles tandis que les molécules en surface d'un fluide simple le sont toujours.

La viscosité relative aux perturbations transverses tangentielles (cisaillement) est associée à l'organisation des molécules dans la surface. Les molécules de forme allongée possédant une énergie d'orientation seront plus sensibles à ce type de perturbations.

Enfin, le coefficient associé aux modes de courbure est plus difficile à identifier. Le coefficient de viscosité élongationnelle intervient aussi dans la dissipation des perturbations de courbure. En effet une interface plane soumise à une perturbation normale périodique suivant une direction tangente à l'interface voit sa surface augmenter. Selon Langevin [95], le terme associé au rayon de courbure seul n'intervient en général que si la tension de surface et le rayon de courbure

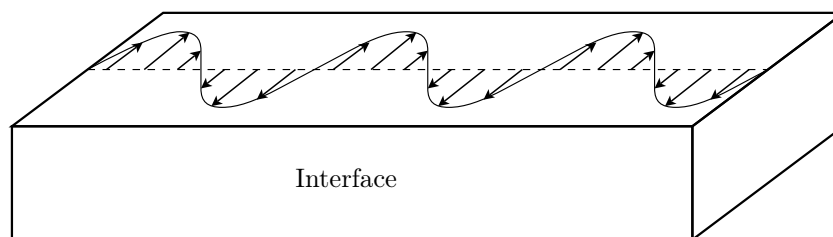


FIGURE 2.7 – Viscosité de cisaillement.

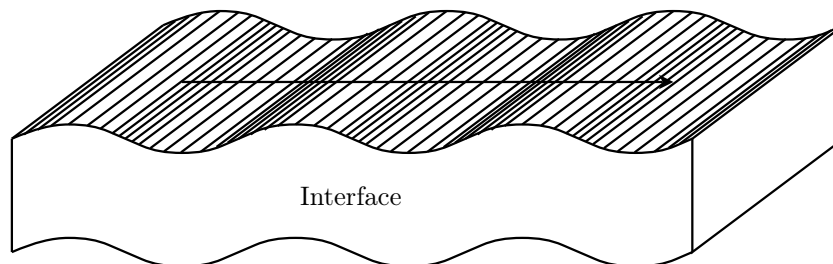


FIGURE 2.8 – Viscosité de variation de courbure.

sont suffisamment faibles car il constitue une correction d'ordre deux à la relation de Laplace. Les interfaces considérées dans ce travail étant supposées planes il n'interviendra pas.

La surface étant considérée comme isotrope dans sa direction tangente et plane, deux coefficients de viscosité pourront suffire pour décrire la dissipation :  $\eta_s$  le coefficient de viscosité élongationnelle et  $\varepsilon$  le coefficient de cisaillement.

#### 2.4.4 Revue de quelques modèles d'interface

Afin de situer les corrections dynamiques à la tension de surface qui seront introduites dans cette thèse, un nombre restreint de modèles d'interface est passé en revue.

##### 2.4.4.1 Modèle de Boussinesq

Le modèle de Boussinesq [18] repose sur l'idée qu'une interface est un fluide newtonien bidimensionnel possédant des propriétés rhéologiques distinctes du volume. À l'équilibre statique, l'isotropie dans le volume est maintenue par l'agitation moléculaire et se traduit par la présence du champ de pression. Boussinesq envisage la surface comme une superposition de feuillets de densité variable, ce gradient de densité fournissant au fluide la force nécessaire à son maintien dans un domaine fixe (voir fig. 2.9). L'isotropie est donc perdue dans la direction normale à l'interface mais demeure dans les directions tangentes à celle-ci. Cette répartition engendre une pression propre à l'interface dans laquelle se reporte le défaut d'isotropie ce qui se traduit par une pression interfaciale plus importante que la pression dans le volume. Cette pression interfaciale s'identifie à la tension superficielle.

Boussinesq décrit ensuite les états dynamiques en formulant plusieurs hypothèses.

**Proposition 1**

Dans le volume, toute particule fluide soumise à une déformation tend à rétablir son isotropie plus ou moins vite sous l'effet de l'agitation thermique par le rétablissement des distances moléculaires moyennes.

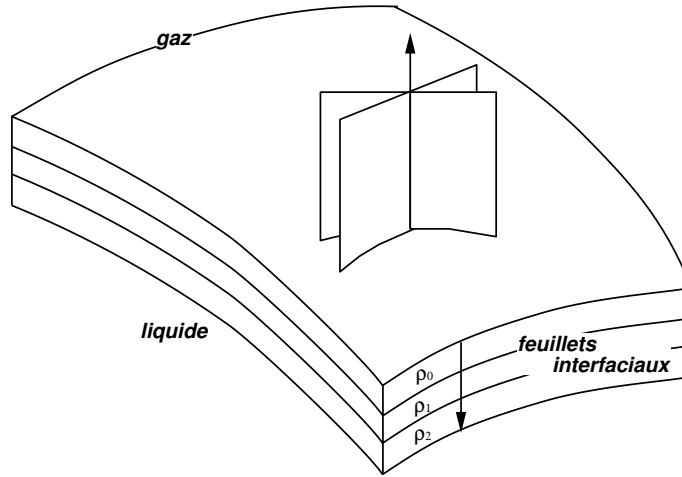


FIGURE 2.9 – Égalisation de la pression par le gradient de densité.

Cette proposition définit les coefficients de viscosité dans le volume par le temps de relaxation évoqué. Pour les particules de la surface la proposition suivante est énoncée :

**Proposition 2**

Les particules en surface et en volume se comportent de manière analogue en tenant compte du fait qu'en surface l'isotropie se restreint localement à un plan tangent.

Dans le volume, l'isotropie conduit à introduire deux coefficients de viscosité,  $\eta$  et  $\mu$ , respectivement les viscosités dynamiques de dilatation et de cisaillement. De la même manière, il est possible de définir des viscosités de dilatation et de cisaillement pour l'interface. Celle-ci étant isotrope suivant un plan tangent, il pourra exister a priori 4 viscosités  $\eta_s$ ,  $\mu_s$ ,  $\eta_n$  et  $\mu_n$ , les deux premières étant respectivement les viscosités dynamiques de dilatation et de cisaillement pour les déformations tangentes à l'interface et les deux dernières les viscosités dynamiques de dilatation et de cisaillement associées à la direction normale. Une nouvelle hypothèse permet de réduire le nombre de coefficients de viscosité nécessaires pour la surface :

**Proposition 3**

L'intensité des forces moléculaires est supposée être suffisante pour que la densité de la couche interfaciale soit indépendante de la dynamique.

Dans le cas d'un fluide incompressible, la condition de divergence nulle est donc respectée dans le volume et dans l'interface ce qui fixe la vitesse de dilatation dans la direction normale

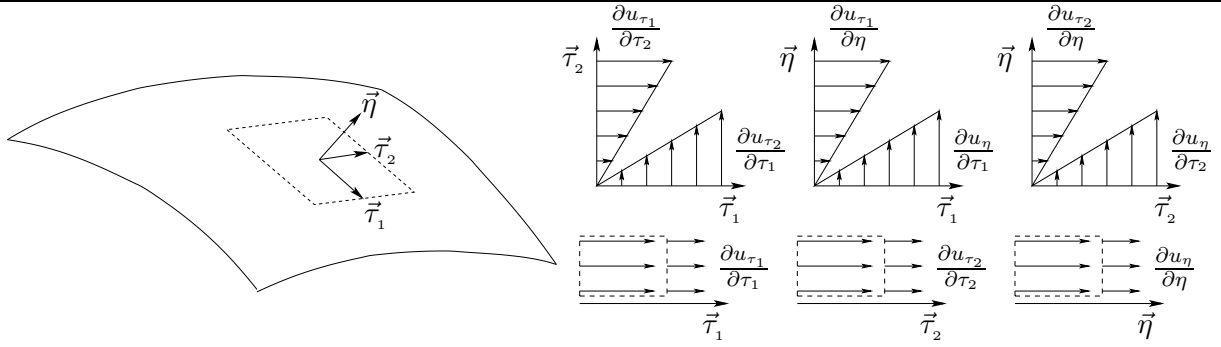


FIGURE 2.10 – Bilan des tensions dans la couche interfaciale.

en fonction des deux autres et permet d'éliminer  $\eta_n$  (voir fig. 2.10). Boussinesq fait ensuite l'hypothèse que les contraintes interfaciales sont beaucoup plus importantes dans les directions tangentes que dans la direction normale, ce qui le conduit à éliminer le coefficient de cisaillement normal  $\mu_n$  qui est relié aux modes de variation de courbure de l'interface. En notant,  $u$  et  $v$  les composantes de vitesse tangentielle suivant les directions  $x$  et  $y$ , les forces de contrainte dans une interface plane s'écrivent alors :

$$\mathcal{F}_x = (\eta_s + \mu_s) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu_s \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.4.3)$$

$$\mathcal{F}_y = (\eta_s + \mu_s) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.4.4)$$

À l'origine, Boussinesq exprime les contraintes suivant les directions principales des contraintes interfaciales. La formulation équivalente présentée ici a été obtenue par Scriven [127]. La théorie de Boussinesq repose sur un grand nombre d'hypothèses non-justifiées et est assez arbitraire en ce qui concerne l'élimination des termes liés à la variation de courbure, mais elle présente l'avantage de la simplicité et capture les termes de correction inertielle à la tension de surface qui peuvent être obtenus avec moins d'hypothèses ad-hoc par la thermodynamique hors équilibre (Bedeaux *et al.* [12], Goodrich [57]).

#### 2.4.4.2 Modèle de Shikhmurzaev

Le modèle introduit par Shikhmurzaev dans [135, 136, 134, 133, 13] est maintenant détaillé suivant la présentation de Monnier et Witomski [105]. Comme discuté dans l'état de l'art de la ligne de contact mobile, celui-ci repose en partie sur une formulation hors-équilibre de l'interface suivant les développements de Bedeaux *et al.* [12], Bedeaux et Oppenheim [11], ainsi que sur un certain nombre d'hypothèses introduites de façon ad hoc. Le domaine de calcul est séparé en deux zones : la zone macroscopique où l'écoulement obéit aux équations de Navier-Stokes et la zone mésoscopique voisine du point triple où s'appliquent les modifications au modèle classique introduites par Shikhmurzaev.

En posant que la vitesse du fluide est notée  $\vec{u}$ , que  $p$  est la pression hydrodynamique,  $\mu$  la viscosité dynamique du liquide, le tenseur des contraintes,  $\Sigma$ , s'écrit (en deux dimensions d'espace) :

$$\Sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.4.5)$$

où  $x_1 = x$  et  $x_2 = z$  pour des coordonnées cartésiennes. Il est alors intéressant d'introduire les vecteurs unitaires tangent à l'interface liquide/gaz  $\vec{t}$  et normal à l'interface dirigé vers l'extérieur  $\vec{n}$  tels que  $(\vec{t}, \vec{n})$  soit direct. Avec cette notation, les contraintes s'exerçant sur l'interface deviennent :

$$\vec{\Sigma}_n = \Sigma \cdot \vec{n} = \Sigma_{nn} \vec{n} + \Sigma_{tn} \vec{t}. \quad (2.4.6)$$

Les composantes  $\Sigma_{nn}$  et  $\Sigma_{tn}$  représentent respectivement les contraintes normales et tangentielles à l'interface liquide/gaz. Les frontières constituées par l'interface liquide/gaz et la paroi solide (interface liquide/solide) sont notées respectivement  $\Gamma_{lg}^M$ ,  $\Gamma_{lg}^m$ ,  $\Gamma_{sl}^M$  et  $\Gamma_{sl}^m$  pour les zones macroscopiques et mésoscopiques de l'interface liquide/gaz et les zones macroscopiques et mésoscopiques de l'interface solide/liquide.

Les conditions d'équilibre à l'interface liquide/gaz s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \vec{\Sigma}_n = (-p_{ext} + \sigma_{lg} K) \vec{n}, & \text{sur } \Gamma_{lg}^M \quad (\text{zone macroscopique}), \\ \vec{\Sigma}_n = (-p_{ext} + \sigma_{lg} K) \vec{n} + (\vec{\nabla} \sigma_{lg} \cdot \vec{t}) \vec{t}, & \text{sur } \Gamma_{lg}^m \quad (\text{zone mésoscopique}). \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Les quantités  $p_{ext}$  et  $K$  représentent respectivement la pression extérieure s'exerçant sur l'interface et la courbure de l'interface. Cette dernière dépend des composantes de vitesse horizontale et verticale. En posant  $h(x_1, t)$ , la hauteur de l'interface en  $x_1$  à l'instant  $t$ , la courbure de l'interface s'écrit :

$$K = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.4.8)$$

et l'évolution du profil d'interface obéit à l'équation :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} = u_2. \quad (2.4.9)$$

Le long de l'interface solide liquide, le fluide vérifie les relations :

$$\begin{cases} u_1 = U_s, & \text{sur } \Gamma_{lg}^M \quad (\text{zone macroscopique}), \\ \Sigma_{tn} = -\beta(u_1 - U_s) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \sigma_{sl} \cdot \vec{t}, & \text{sur } \Gamma_{lg}^m \quad (\text{zone mésoscopique}), \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_{lg}^m. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Les grandeurs  $\beta$  et  $U_s$  désignent respectivement le coefficient de rappel du modèle de glissement et la vitesse de la paroi solide.

Afin de tenir compte des effets microscopiques, un certain nombre de relations sont introduites pour décrire le comportement du fluide aux interfaces et au point triple. Contrairement à

Bedeaux *et al.* [12], Shikmurzaev considère que la densité de surface est singulière à l'interface, c'est-à-dire non-négligeable, ce qui le conduit à écrire l'équation de continuité suivante, le long l'interface :

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^s \vec{v}^s) = -\rho^f (\vec{u} - \vec{v}^s) \cdot \vec{n}. \quad (2.4.11)$$

Où  $\rho^s$ ,  $\rho^f$  et  $\vec{v}^s$  sont respectivement la densité de l'interface considérée, la densité du fluide et la vitesse de l'interface considérée. L'utilisation de la relation de Gibbs pour une surface :

$$du^s = TdS^s + \chi^s d\rho^s, \quad (2.4.12)$$

où  $u^s$  est la densité surfacique d'énergie interne à la surface et  $S^s$  la densité d'entropie, fournit une relation entre le potentiel chimique  $\chi^s$  et la tension de surface  $\sigma$  qui vérifient la relation :

$$\rho^s \chi^s = u^s - TS^s + \sigma. \quad (2.4.13)$$

Puis en suivant un raisonnement similaire à de Groot et Mazur [59] et en négligeant les termes d'effets croisés ainsi que les transferts de masse entre interface ayant une autre origine que le potentiel chimique, Shikmurzaev obtient l'équation d'échange de matière entre le fluide et la surface :

$$\rho^f (\vec{u} - \vec{v}^s) \cdot \vec{n} = k_\rho (\chi^s(\sigma, T) - \chi^f(p^f, T)), \quad (2.4.14)$$

avec  $p^f$  la pression dans le fluide et  $k_\rho$  le coefficient d'échange de matière. La tension de surface est maintenant envisagée comme une fonction de la densité de surface  $\rho^s$  :

$$\sigma_i = \gamma(\rho_{0,i}^s - \rho_i^s), \quad (2.4.15)$$

où selon Shikmurzaev  $\gamma$  et  $\rho_{0,i}^s$  sont des constantes données,  $i = lg$  pour l'interface liquide/gaz et  $i = sl$  pour l'interface solide/liquide. À l'équilibre les potentiels chimiques sont supposés égaux :

$$\chi_i^s(\sigma_i^0, T) = \chi^f(p^f, T), \quad (2.4.16)$$

si bien que, proche de l'équilibre, la différence des potentiels chimiques devient :

$$\chi_i^s - \chi^f = \frac{d\chi_i^s}{d\rho_i^s}(\rho_{0,i}^s)(\rho_i^s - \rho_{0,i}^s). \quad (2.4.17)$$

Pour finir, en posant  $\tau = (k_\rho \frac{d\chi_i^s}{d\rho_i^s}(\rho_{0,i}^s))^{-1}$  le temps caractéristique d'échange de matière entre le fluide et l'interface, l'équation de conservation 2.4.11 devient :

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^s \vec{v}_{lg}^s) = -\frac{\rho_i^s - \rho_{0,i}^s}{\tau}. \quad (2.4.18)$$

À ces relations s'ajoutent une équation reliant la tension superficielle et la vitesse moyenne  $\vec{v}_{lg}^s$ , qui s'applique dans l'épaisseur de l'interface liquide/gaz pour la zone mésoscopique  $\Gamma_{lg}^m$  :

$$(1 + 4\alpha\beta)\vec{\nabla}\sigma_{lg} = 4\beta(\vec{v}_{lg}^s - \vec{u}), \quad (2.4.19)$$

ainsi qu'une équation du type loi de Darcy faisant intervenir la vitesse moyenne  $\vec{v}_{sl}^s$ , valable dans l'épaisseur de l'interface solide/liquide pour la zone mésoscopique  $\Gamma_{sl}^m$  :

$$\vec{v}_{sl}^s = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{U}_s) + \alpha \vec{\nabla} \sigma_{sl}. \quad (2.4.20)$$

Enfin, à la ligne triple, le transfert de matière entre l'interface liquide/gaz et l'interface solide/gaz obéit à :

$$\rho_{lg}^s \vec{v}_{lg}^s \cdot \vec{e}_{lg} = \rho_{sl}^s \vec{v}_{sl}^s \cdot \vec{e}_{sl}, \quad (2.4.21)$$

où  $\vec{e}_{lg}$  et  $\vec{e}_{sl}$  sont respectivement les vecteurs tangent à l'interface liquide/gaz et à l'interface solide/liquide au point triple. L'angle de contact dynamique est alors défini par :

$$\cos(\theta_d) = -\vec{e}_{lg} \cdot \vec{e}_{sl}, \quad (2.4.22)$$

il vérifie la relation de Young-Dupré dynamique :

$$\sigma_{lg}(\rho_{lg}^s) \cos(\theta_d) = \sigma_{sg} - \sigma_{sl}(\rho_{sl}^s), \quad (2.4.23)$$

et fournit une condition au point triple pour le profil d'interface :

$$\cot(\theta_d) = -\frac{\partial h}{\partial x_1}. \quad (2.4.24)$$

#### 2.4.4.3 Modèle de G. Kasperski

Ce modèle d'interface a été proposé par G. Kasperski et présenté dans l'article de Chénier *et al.* [28]. Il s'applique à la description de l'interface séparant un liquide pur et un gaz. Le champ de vitesse du liquide à l'interface n'est pas homogène. Par conséquent, une particule de fluide sur la surface libre est déformée par le champ de vitesse interfacial.

##### hypothèse 1 :

L'énergie de surface de la particule fluide est injectée (ou puisée) dans le volume. Le transfert est décrit par la densité de puissance  $-\sigma \text{div}_s(\vec{V}_s)$ , où  $\text{div}_s$  est la divergence surfacique.

##### hypothèse 2 :

On suppose que localement un incrément de pression  $\delta P$  résulte du transfert d'énergie de surface dans une couche mésoscopique d'épaisseur  $\lambda$ . Alors l'incrément local d'énergie de surface est  $\lambda \delta P$ .

##### hypothèse 3 :

L'évolution temporelle de cette quantité est modélisée de la manière suivante :

$$\frac{\partial(\lambda \delta P)}{\partial t} = -\sigma \text{div}_s(\vec{V}_s) - \alpha^{-1}(\lambda \delta P). \quad (2.4.25)$$

Le coefficient  $\alpha$  est le temps caractéristique de retour à l'équilibre d'une interface soumise à une perturbation à un instant donné.  $\lambda$  est l'épaisseur de l'interface.

**hypothèse 4 :**

En considérant que  $\alpha$  est suffisamment faible pour obtenir que l'équilibre instantané soit vérifié, (2.4.25) :

$$\alpha^{-1}(\lambda\delta P) = -\sigma \operatorname{div}_s(\vec{V}_s). \quad (2.4.26)$$

En partant du principe que  $\lambda\delta P$  s'oppose à la tension de surface ce terme doit intervenir dans l'équilibre des contraintes surfaciques :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma - (\lambda\delta P) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma + \alpha \sigma \operatorname{div}_s(\vec{V}_s) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

**Application au problème de cuve différentiellement chauffée :**

En considérant un problème bidimensionnel où la surface libre est supposée indéformable suivant sa direction normale, elle peut alors être assimilée à une ligne droite horizontale. Dans ce cas le modèle de G. Kasperski conduit à écrire l'équilibre des contraintes à l'interface sous cette forme :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left( 1 + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ &= -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \left( 1 + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \sigma_0 (1 - \gamma(T - T_0)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

La tension de surface est modélisée comme dépendant linéairement de la température :  $\sigma = \sigma_0(1 - \gamma(T - T_0))$ ,  $\mu$  est la viscosité dynamique et  $\alpha$  le temps de relaxation de la surface introduit par le modèle (à déterminer). En considérant que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  est du même ordre que  $\gamma$ , il vient :

$$\alpha \sigma_0 \gamma (T - T_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.4.29)$$

et en admettant que :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1, \quad (2.4.30)$$

ce qui revient à utiliser les conditions de Boussinesq selon la formulation de l'article de Platten et Legros [117] :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4.31)$$



Le terme (2.4.30) n'est pas a priori négligeable. De plus il représente la correction du nombre de Marangoni par la dynamique de l'interface. L'équation obtenue avec le modèle de G. Kasperski est donc :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \left(1 + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4.32)$$

Qui, en adimensionnant, devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -Ma \left(1 + C_{dyn} \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + C_{rs} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.4.33)$$

avec  $Ma = \frac{\gamma \Delta T L_z}{\mu \kappa}$ ,  $C_{dyn} = \frac{\alpha \kappa}{L_z^2}$ ,  $C_{rs} = \frac{\alpha \sigma_0}{\mu L_z}$ . Deux nouveaux nombres adimensionnels apparaissent :  $C_{dyn}$  et  $C_{rs}$  correspondant respectivement à la correction dynamique du nombre de Marangoni et à la raideur de la surface libre.

#### Remarque :

En réalité le modèle de G. Kasperski ne nécessite pas d'introduire deux nouveaux paramètres car ils sont tous les deux basés sur le temps de relaxation  $\alpha$ . En effet  $\frac{C_{rs}}{C_{dyn}} = \frac{\sigma_0 L_z}{\mu \kappa} (= \frac{Ma \sigma_0}{\gamma \Delta T})$ , c'est-à-dire que les données du problème :  $\sigma_0$  la tension de surface à  $T_0$ ,  $L_z$  la hauteur du domaine,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\kappa$  la diffusivité thermique vont déterminer les deux constantes quel que soit l'écart de température imposé. Le seul paramètre supplémentaire à étudier est  $\alpha$  qui doit être mesuré.

#### 2.4.4.4 Modèles d'interface diffuse

Ce type de modèle sortant du cadre de cette thèse, la discussion qui suit a pour objectif d'énoncer leurs caractéristiques principales et de souligner les points sensibles nécessitant une attention particulière pour une éventuelle utilisation future.

Les modèles dits d'interfaces diffuses, second gradient, fluides de Cahn-Hilliard ou encore de champ de phase constituent une alternative intéressante à l'approche de Bedeaux *et al.* [12] ou Goodrich [57] qui mérite d'être mentionnée. Cette approche autorise la prise en compte des forces de tension superficielle et de tout effet dynamique susceptible de modifier l'équilibre des contraintes à l'interface ce qui la rend adaptée à de nombreuses applications, dont la plupart sont énumérées dans l'article de revue de Anderson *et al.* [1]. Ce type de formulation apparaît avec les travaux de van der Waals [148] qui établit la description thermodynamique d'une interface d'épaisseur non-nulle à l'intérieur de laquelle la densité du fluide varie et pour laquelle l'énergie libre dépend aussi du gradient de densité. Les contraintes à l'interface prennent en compte les forces capillaires par l'introduction du tenseur de Korteweg formé à partir du gradient de densité. Selon Antanovskii [3], ce type d'approche peut aussi bien décrire une interface entre deux fluides non-miscibles, auquel cas la tension de surface est l'énergie libre des molécules en surface, qu'une interface entre deux fluides miscibles, la tension de surface est alors l'énergie interne des molécules de l'interface (Antanovskii [4]). Pour finir, la forme de l'énergie libre utilisée dans ce type de méthode et celle des théories de champ moyen de Ginzburg-Landau sont tout à fait semblables bien qu'elles soient basées sur des considérations différentes, les

dernières étant utilisées, entre autres, pour décrire la séparation en domaines des matériaux magnétiques ou la solidification.

Les équations sont maintenant dérivées suivant la formulation des articles de Jacqmin [79, 78] qui permet de décrire l'écoulement de deux fluides non-miscibles incompressibles. Les deux fluides occupent tout le volume et leur présence est caractérisée par le paramètre numérique  $C + \frac{1}{2}$  qui indique la fraction du fluide 1 (par exemple) qui compose une particule de fluide à une position et un instant donnés. La fraction du fluide 2 est donnée par  $\frac{1}{2} - C$ . Lorsque  $C = \frac{1}{2}$  le volume est totalement occupé par le fluide 1 et pour  $C = -\frac{1}{2}$  par le fluide 2. Pour un système isotherme, la densité d'énergie libre, notée  $f$ , s'écrit :

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon\sigma\alpha|\vec{\nabla}C|^2 + \varepsilon^{-1}\sigma\beta\Psi(C), \quad (2.4.34)$$

où  $\Psi(C)$  est la densité d'énergie libre classique,  $|\vec{\nabla}C|^2$  exprime la densité d'énergie libre provenant du gradient de concentration,  $\varepsilon$  est l'épaisseur de l'interface,  $\sigma$  est la tension de surface,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes adimensionnelles liées au choix de  $\Psi(C)$  et  $\varepsilon$ . Le choix de :

$$\Psi(C) = (C + \frac{1}{2})^2(C - \frac{1}{2})^2, \quad (2.4.35)$$

permet d'imposer simplement la séparation des deux fluides. En effet, la figure 2.11(a), qui représente  $\Psi$  en fonction de  $C$ , montre que le potentiel possède deux minima en  $C = \pm\frac{1}{2}$  et un maximum en  $C = 0$  qui constitue une barrière responsable de la séparation des deux phases. Le profil d'une interface à l'équilibre statique s'obtient alors en considérant que la répartition spatiale de concentration minimise l'énergie libre totale  $\mathcal{F} = \int f dV$ . Le calcul des variations, conduit à :

$$\delta\mathcal{F} = (\varepsilon^{-1}\sigma\beta\Psi'(C) - \varepsilon\sigma\alpha\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}C)\delta C, \quad (2.4.36)$$

et fournit la définition thermodynamique du potentiel chimique :  $\phi \equiv \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta C}$ , qui est constant. Le

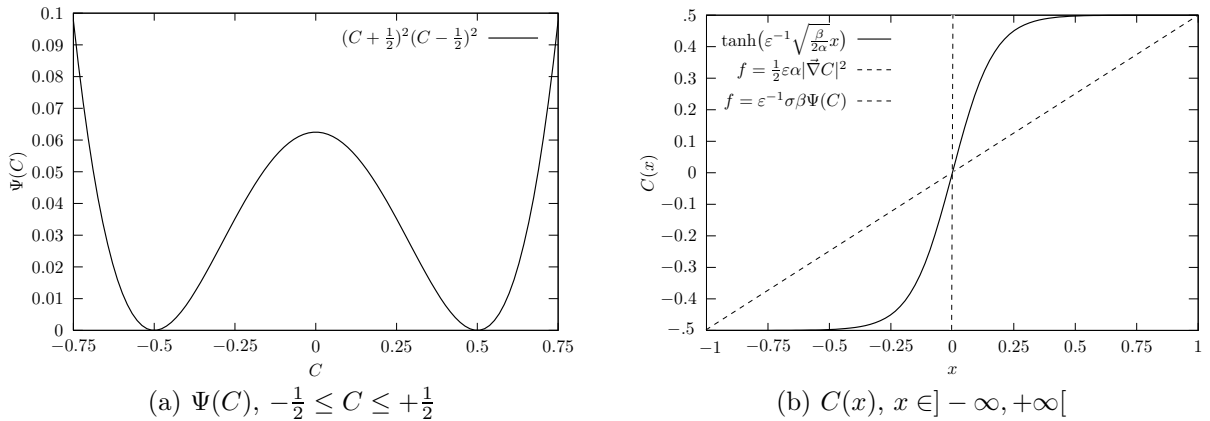


FIGURE 2.11 – Profils d'énergie libre volumique et de concentration à l'équilibre.

profil d'interface est obtenu en écrivant qu'à l'équilibre l'énergie totale,  $\mathcal{F}$ , est minimale :

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta C} = 0 = \phi. \quad (2.4.37)$$

En supposant qu'à l'équilibre l'interface est plane et que  $C$  varie suivant une unique direction notée  $x$ , le profil d'interface (c.f. fig. 2.11(b)) est alors donné par l'équation :

$$C(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(\varepsilon^{-1} \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}\right), \quad (2.4.38)$$

qui découle du choix de  $\Psi(C)$  (5). Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont ajustées de manière à satisfaire les définitions de la tension de surface  $\sigma$  et de l'épaisseur d'interface  $\varepsilon$  pour un profil donné d'interface plane à l'équilibre. La tension de surface vérifie :

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \sigma \alpha \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2. \quad (2.4.39)$$

Par conséquent,  $\alpha$  doit vérifier :

$$\varepsilon \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 = 1. \quad (2.4.40)$$

Dans la formulation de Jacqmin [78], l'épaisseur d'interface,  $\varepsilon$ , est définie comme la distance nécessaire pour que  $C$  passe de  $-0,45$  à  $+0,45$  ce qui, avec la valeur de  $\alpha$  et l'expression du profil d'interface, suffit à déterminer  $\beta$ .

Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire :

$$\rho(C) \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot (\mu(C) \vec{\nabla} \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{F}_{source} \quad (2.4.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C &= \vec{\nabla} \cdot (\kappa(C) \vec{\nabla} \phi) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left( \kappa(C) \vec{\nabla} (\varepsilon^{-1} \sigma \beta \Psi'(C) - \varepsilon \sigma \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} C) \right). \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

La densité  $\rho$ , la viscosité dynamique  $\mu$  et le coefficient de diffusion chimique  $\kappa$  (appelé aussi mobilité) dépendent a priori de  $C$ . Dans la pratique cette dépendance est négligée au moins pour  $\kappa$ . Si les deux fluides ont des densités et des viscosités dynamiques voisines, elles peuvent aussi être considérées constantes et ceci peut être vu comme une approximation de Boussinesq. Les équations (2.4.41-2.4.43) sont alors les équations couplées de Navier-Stokes et d'advection diffusion de  $C$  pour deux fluides non-miscibles, newtoniens et incompressibles dans lesquelles les forces capillaires sont incluses par le biais du terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$ , où  $\vec{\tau}$  est le tenseur de Korteweg :

$$\tau_{ii} = \varepsilon \sigma \alpha \sum_{j \neq i} \left( \frac{\partial C}{\partial x_j} \right)^2, \quad (2.4.44)$$

$$\tau_{ij} = -\varepsilon \sigma \alpha \left( \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right). \quad (2.4.45)$$

---

5. Rowlinson et Widom [122, pp. 50-56] montrent la nécessité de chacun des deux termes composant  $f$  pour obtenir un profil d'interface continu mais localisé et de quelle manière l'utilisation d'un seul conduit à des profils de concentration soit linéaires, pour  $|\vec{\nabla} C|^2$  seul, soit discontinus, pour  $\Psi(C)$  seul (voir figure 2.11(b)).

Lorsque l'épaisseur de l'interface devient négligeable (aux échelles macroscopiques) les équations tendent vers leur formulation usuelle dans le cas d'une interface d'épaisseur nulle et de tension de surface  $\sigma$ , ce qui rend ces méthodes très attractives.

Une autre caractéristique de la formulation de Jacqmin [79, p. 98] est de dissiper l'énergie qui décroît de manière monotone comme :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\kappa \int (\nabla\phi)^2 dV, \quad (2.4.46)$$

ce qui élimine les courants parasites provenant de la représentation de l'interface par un maillage fixé. Néanmoins Jamet *et al.* [80] discutent d'une formulation conservant l'énergie et produisant des courants parasites dont l'intensité est de l'ordre de l'erreur de troncature. La description des effets thermocapillaires lorsque le champ de température ne dépend pas de l'écoulement a été effectuée par Jasnow et Viñals [83]. Dans le cas où la thermique et la dynamique sont couplées le potentiel thermodynamique à considérer n'est plus l'énergie libre mais l'entropie (voir entre autres Jamet *et al.* [81]). Enfin, l'application de ces méthodes aux écoulements macroscopiques demeure un problème. En effet, il est nécessaire de disposer d'une discrétisation suffisante pour bien représenter l'interface. Jamet *et al.* [81] proposent d'y remédier par l'introduction d'une formulation autorisant l'emploi d'une interface plus épaisse tout en conservant la physique correspondant à l'épaisseur réelle de l'interface, ce qui permettrait d'élargir le champ d'application de ces méthodes.

#### 2.4.4.5 Modèle utilisé dans ce travail

Dans cette thèse les termes correctifs à la tension de surface envisagés pour lever la singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires confinés sont issus du modèle de G. Kasperski (Chénier *et al.* [28]) lorsque seule la partie dissipative est prise en compte. Dans ce cas ce modèle est équivalent à la formulation de Boussinesq pour un écoulement bidimensionnel où l'interface est alors contenue dans une seule direction d'espace.

## 2.5 Organisation du manuscrit

Afin de comprendre l'impact des modèles de glissement et d'interface sur la singularité des écoulements thermocapillaires trois configurations ont été étudiées. Tout d'abord l'introduction de glissement dans la cavité entraînée permet de mieux appréhender de quelle manière cet effet modifie les écoulements. Ensuite, l'effet d'une viscosité interfaciale de cisaillement, qui fait intervenir un terme en dérivée seconde dans la direction tangente comme pour une viscosité interfaciale d'élongation, est étudié dans une configuration monodimensionnelle simple pour laquelle une solution analytique singulière est connue (Gatignol et Prud'homme [49, p. 20]). Le glissement est ensuite introduit pour lever la singularité de cette configuration, ce qui permet de vérifier la compatibilité des modèles de glissement et de viscosité interfaciale. Enfin, les différents modèles sont appliqués au cas d'un écoulement thermocapillaire bidimensionnel dans une cuve différentiellement chauffée.

Ce travail de thèse s'organise de la manière suivante. Le chapitre 2 expose les équations et l'adimensionnement de chacune des configurations abordées dans ce travail. Le chapitre 3 développe la formulation numérique des équations dans le cadre des méthodes spectrales de collocation. La discrétisation temporelle et le découplage de la vitesse et de la pression pour un fluide incompressible sont aussi détaillés. L'algorithme permettant la prise en compte des conditions de viscosité interfaciale<sup>(6)</sup> ayant été mis au point au cours de la thèse il est développé en détail ainsi que les algorithmes traitant les conditions mixtes et mixtes non uniformes à partir desquels il a été élaboré. Le chapitre 4 expose la validation de l'algorithme permettant le traitement de la condition de viscosité interfaciale sur des cas tests. Le chapitre 5 est une validation de ce même algorithme sur un problème thermique ne comportant pas de singularité. Le chapitre 6 concerne l'application des conditions de glissement au traitement de la singularité de vitesse de la cavité entraînée et discute des écoulements obtenus. Le chapitre 7 traite du problème de canal monodimensionnel pour une interface visqueuse. Le chapitre 8 montre comment obtenir une meilleure régularité du modèle décrivant les écoulements thermocapillaires confinés par la prise en compte d'une viscosité interfaciale et d'un glissement aux parois solides. Le chapitre 9 présente les conclusions tirées de cette thèse ainsi que les perspectives possibles pour de futurs travaux.

---

6. L'algorithme permettant la prise en compte de la viscosité interfaciale et d'une manière générale de conditions mixtes en dérivée seconde tangentielle et première normale a fait l'objet d'une publication (Nguyen et Delcarte [107]).

# MODÉLISATION DES DIFFÉRENTS PROBLÈMES ABORDÉS, CONDITIONS AUX LIMITES ET PARAMÈTRES ADIMENSIONNELS

Pour chacun des problèmes étudiés dans cette thèse le modèle académique singulier correspondant est d'abord décrit. Le choix de l'adimensionnement des équations et les paramètres physiques qui en découlent sont alors discutés. Enfin une formulation générale de ces différents adimensionnements est introduite à partir de laquelle les développements numériques du chapitre 4 seront présentés. Ceci pour conserver un caractère global à la formulation des algorithmes dont il sera question.

La géométrie des différentes configurations peut être limitée à deux dimensions d'espace. Bien que la nature des solutions obtenues puisse dépendre du nombre de dimensions d'espace, les singularités présentes dans les modèles mathématiques classiques sont, elles, tout à fait analogues en 2D ou en 3D. C'est pourquoi, les différents phénomènes pris en compte et l'étude de leur influence sur la régularité d'un modèle donné se feront en 2D, comme représenté par les figures 3.1, 3.2b, 3.3 et 3.4. La vitesse du fluide supposé newtonien sera considérée comme suffisamment modérée pour que le fluide puisse être traité comme incompressible.

Par la suite  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$  désignera la dérivée particulaire d'une grandeur scalaire ou vectorielle,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  l'opérateur laplacien d'une grandeur scalaire ou vectorielle,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$  l'opérateur gradient d'une quantité scalaire (tous ces opérateurs sont exprimés en 2D dans un repère cartésien).

## 3.1 Cavité entraînée

La cavité entraînée est un problème académique qui décrit l'écoulement d'un fluide visqueux confiné dans un domaine rectangulaire, délimité par des parois solides dont la paroi supérieure horizontale coulisse à vitesse constante parallèlement à elle-même.

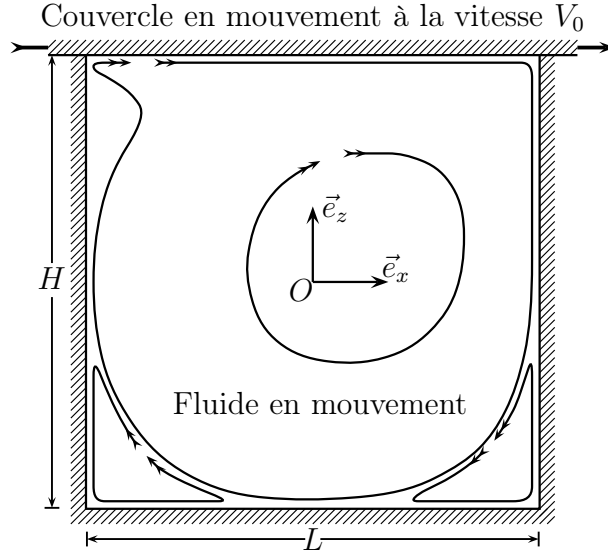


FIGURE 3.1 – Cavité entrain e 2D.

### 3.1.1 Modèle classique

L'écoulement est décrit par les équations locales suivantes :

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad (3.1.1)$$

$$\rho_0 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta w, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.1.3)$$

associées dans la formulation classique aux conditions de non glissement :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.1.4)$$

$$u = V_0 \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (non glissement)}, \quad (3.1.5)$$

$$u = 0 \quad \text{en } z = -\frac{H}{2} \text{ (non glissement)}, \quad (3.1.6)$$

$$w = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2} \text{ (non glissement)}, \quad (3.1.7)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}. \quad (3.1.8)$$

### 3.1.2 Régularisation

La formulation classique est connue pour comporter une singularité de vitesse aux points de jonction entre les parois verticales et le couvercle du type problème de Taylor (c.f section 2.2.1).

Le calcul d'une solution numérique approchée par des méthodes spectrales nécessite le filtrage explicite de cette singularité. La condition de frontière sur le couvercle est alors pondérée par un polynôme  $f_n(x)$  dont le degré fixe la longueur de régularisation. L'expression (3.1.5) est remplacée par :

$$\begin{aligned} u &= f_n(x) V_0 \\ &= \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^{2n}\right)^2 V_0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

La longueur de filtrage  $\delta x = |x_0 - x_{.95}|$  associée au paramètre  $n$  est définie comme la distance séparant une extrémité du couvercle du point le plus proche pour lequel  $u = .95V_0$ . Dans ce cas  $\delta x = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt[2n]{1 - \sqrt{.95}} \simeq -\frac{L \ln(1 - \sqrt{.95})}{4n}\right)$    l'ordre 1 en  $n^{-1}$  pour  $n$  suffisamment grand. Car le développement de  $\sqrt[2n]{1 - \sqrt{.95}}$  en série de Taylor autour de 1, donne :

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{1 - \sqrt{.95}} &= 1 - \frac{\sqrt{.95}}{2n} + \left(\frac{1}{8n^2} - \frac{1}{4n}\right)(\sqrt{.95})^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{48n^3} + \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{6n}\right)(\sqrt{.95})^3 + \left(\frac{1}{384n^4} - \frac{1}{32n^3} + \frac{11}{96n^2} - \frac{1}{8n}\right)(\sqrt{.95})^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-\sqrt{.95})^k}{k} + \mathcal{O}(n^{-2}) \\ &= 1 + \frac{\ln(1 - \sqrt{.95})}{2n} + \mathcal{O}(n^{-2}), \end{aligned}$$

dont seul le terme dominant en  $n$  a été explicitement pris en compte.

### 3.1.3 Glissement

Dans le cas d'un glissement linéaire, 1er ordre en  $V_0$ , la condition de Navier est appliquée à la composante tangentielle de la vitesse sur chaque paroi solide. Les nouvelles conditions aux limites s'écrivent :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.1.10)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = k(V_0 - u) \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (Navier)}, \quad (3.1.11)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = k(u - 0) \quad \text{en } z = -\frac{H}{2} \text{ (Navier)}, \quad (3.1.12)$$

$$\mp \mu \frac{\partial w}{\partial x} = k(w - 0) \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2} \text{ (Navier)}, \quad (3.1.13)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}. \quad (3.1.14)$$

Dans ces expressions  $k$  est un coefficient de rappel (frottement sur la paroi) ayant la dimension d'une quantité de mouvement par unité de volume.  $\frac{\mu}{k}$  a la dimension d'une longueur définie comme la longueur de glissement dont l'origine est expliquée au chapitre 1.



### 3.1.4 Glissement non uniforme

Afin de prendre en compte la dépendance en fonction de la contrainte de la longueur de glissement, il peut être nécessaire d'introduire un coefficient  $k(\frac{\partial u}{\partial \tau})$  qui est maintenant une fonction de la contrainte<sup>(1)</sup>. Ceci transforme la condition de glissement en une condition non linéaire. En première approximation il est possible d'imposer la variation de la force de rappel, qui doit tendre vers zéro quand la contrainte devient suffisamment grande, c'est-à-dire au voisinage des coins. Le coefficient de frottement est modulé par une fonction sans dimension qui s'annule dans les coins et tend vers 1 assez loin de ceux-ci,  $kg_n(x)$ , ceci uniquement sur le couvercle de la cavité. Les conditions de glissement restant inchangées ailleurs. Les conditions aux limites deviennent :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.1.15)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = k g_n(x) (V_0 - u) \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (glissement non uniforme),} \quad (3.1.16)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = k(u - 0) \quad \text{en } z = -\frac{H}{2} \text{ (Navier),} \quad (3.1.17)$$

$$\mp \mu \frac{\partial w}{\partial x} = k(w - 0) \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2} \text{ (Navier),} \quad (3.1.18)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}. \quad (3.1.19)$$

Deux types de glissement non uniforme sont introduits :

$$g_n(x) = 1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^{2n} \quad \text{fonction concave près des coins,} \quad (3.1.20)$$

$$g_n(x) = \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^{2n}\right)^2 \quad \text{fonction convexe près des coins,} \quad (3.1.21)$$

ce qui permettra d'étudier la dépendance de la régularité de la solution vis-à-vis de la modulation.

### 3.1.5 Paramètres adimensionnels

Le fluide étant mis en mouvement par l'intermédiaire du couvercle,  $V_0$  s'impose naturellement comme vitesse de référence. Les longueurs sont rapportées à la longueur du couvercle  $L$ , le temps, au temps caractéristique  $\frac{L}{V_0}$  associé à la vitesse caractéristique et à l'échelle de longueur et la pression à l'échelle caractéristique définie par la vitesse du couvercle :  $\rho_0 V_0^2$ . Les variables adimensionnées sont notées ( $\cdot$ ). Le passage aux variables adimensionnées s'effectue en

---

1. Le caractère newtonien du fluide impose que  $\mu$  ne varie pas.

remplaçant  $x, z, t, u, w$  et  $p$  dans les différentes équations sur la base des relations suivantes :

$$\begin{cases} x = L \hat{x}, \\ z = L \hat{z}, \\ t = \frac{L}{V_0} \hat{t}, \\ u = V_0 \hat{u}, \\ w = V_0 \hat{w}, \\ P = \rho_0 V_0^2 \hat{p}. \end{cases}$$

Pour alléger la notation les variables adimensionnées seront aussi notées simplement au lieu de  $(\hat{\cdot})$ . Les équations de Navier-Stokes adimensionnées s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (3.1.22)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (3.1.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.1.24)$$

associées aux conditions aux limites adimensionnées :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.1.25)$$

$$\left[ \begin{array}{l} u = 1 \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{A_L}{2} \text{ (non glissement),} \quad (3.1.26)$$

$$\left[ \begin{array}{l} u = (1 - (2x)^{2n})^2 \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{A_L}{2} \text{ (régularisation),} \quad (3.1.27)$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_s \frac{\partial u}{\partial z} = (1 - u) \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{A_L}{2} \text{ (glissement uniforme),} \quad (3.1.28)$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_s \frac{\partial u}{\partial z} = g_n(x)(1 - u) \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{A_L}{2} \text{ (glissement non uniforme),} \quad (3.1.29)$$

$$\left[ \begin{array}{l} u = 0 \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = -\frac{A_L}{2} \text{ (non glissement),} \quad (3.1.30)$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_s \frac{\partial u}{\partial z} = u \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = -\frac{A_L}{2} \text{ (glissement uniforme),} \quad (3.1.31)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} w = 0 & \text{en } x = \pm \frac{1}{2} \text{ (non glissement),} \end{array} \right. \quad (3.1.32)$$

$$\text{ou} \quad (3.1.33)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \mp l_s \frac{\partial w}{\partial x} = w & \text{en } x = \pm \frac{1}{2} \text{ (glissement uniforme),} \end{array} \right. \quad (3.1.34)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{A_L}{2}. \quad (3.1.35)$$

Le passage aux variables adimensionnées fait apparaître plusieurs nombres sans dimension : le nombre de Reynolds  $Re = V_0 \frac{\rho_0 L}{\mu} = \frac{V_0 L}{\nu}$ , défini comme le rapport de la vitesse inertielle à la vitesse de diffusion visqueuse, la longueur de glissement adimensionnée  $l_s = \frac{\mu}{kL}$  obtenue par le rapport de la longueur de glissement  $\frac{\mu}{k}$  à la longueur caractéristique, le rapport d'aspect  $A_L = \frac{H}{L}$ , qui caractérise la géométrie du problème.

Ces nombres sans dimension constituent les paramètres physiques du problème. Un petit nombre de Reynolds,  $Re \ll 1$ , caractérise un écoulement rampant (bien décrit par l'équation de Stokes - le terme d'inertie  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$  est négligeable devant le terme visqueux  $\nu \Delta \vec{v}$  : fluide très visqueux, vitesse  $V_0$  très faible ou domaine très petit). Un nombre de Reynolds élevé,  $Re \gg 1$ , exprime la prédominance du terme inertiel sur le terme diffusif. Ceci se traduit par l'apparition de structures de petite taille générées par l'advection, la dissipation de l'énergie s'effectue alors à la plus petite échelle de longueur présente dans l'écoulement.

La longueur de glissement adimensionnée  $l_s$  caractérise l'importance du glissement devant la longueur caractéristique du domaine. La longueur de glissement dimensionnelle  $\frac{\mu}{k}$  est une caractéristique physique de la configuration, associée à la nature du fluide et de la paroi avec laquelle il est en contact. La longueur adimensionnée  $l_s$  varie avec la dimension caractéristique du domaine comme  $\frac{1}{L}$ .

Le rapport d'aspect  $A_L = \frac{H}{L}$  caractérise l'allongement de la cavité selon l'une des deux directions d'espace et influence la topologie de l'écoulement. Pour de faibles nombres de Reynolds (écoulement de Stokes) l'allongement vertical de la cavité se traduit par l'apparition successive d'un nombre de cellules qui croît avec  $A_L$  (Shankar et Deshpande [130]).  $A_L$  étant proportionnel à  $H$ , il peut être considéré comme décrivant l'allongement de la cavité dans la direction verticale.

## 3.2 Viscosimètre d'interface

Afin de mesurer la viscosité d'une interface liquide/gaz, différents dispositifs expérimentaux ont été introduits. L'un d'entre eux, proposé par Mannheimer [100, 45], est un canal annulaire formé par deux cylindres et contenant un liquide mis en mouvement par la rotation du fond (figure 3.2a). Sous l'hypothèse que le rayon externe est suffisamment grand devant la largeur du canal la courbure peut être négligée. Le viscosimètre d'interface de Mannheimer peut alors être modélisé par un canal rectiligne de longueur infinie dont le fond se déplace dans la direction longitudinale  $Oy$ . La figure 3.2b représente cette configuration académique. Celui-ci est une restriction d'un problème formulé par Prud'homme et Gatignol [49] pour étudier la viscosité

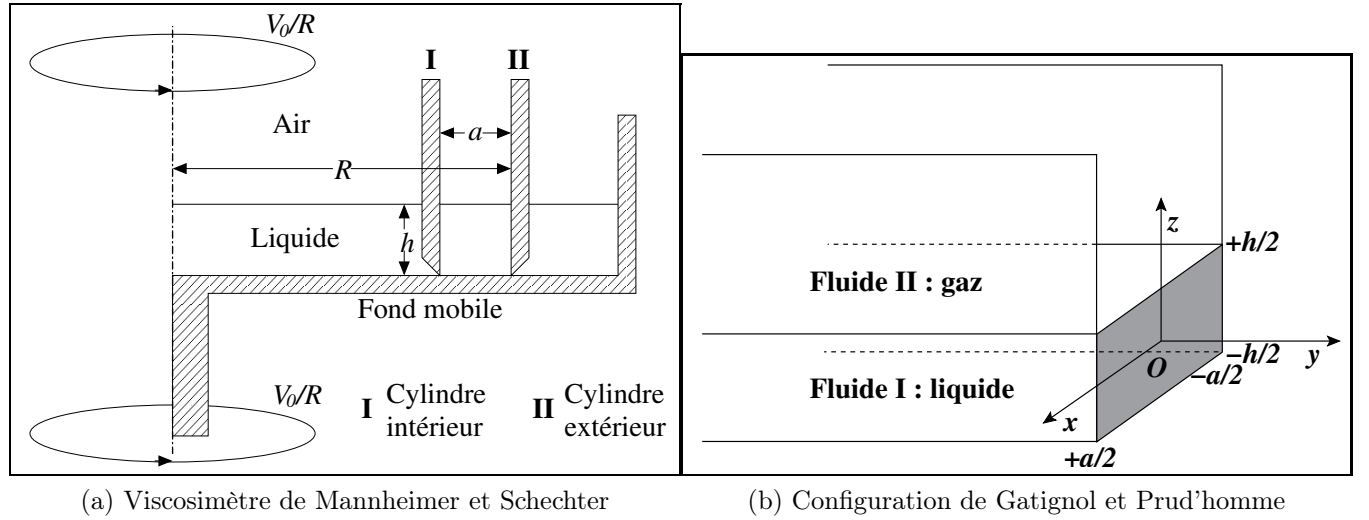


FIGURE 3.2 – Canal entraîné par le fond.

d'interface. Ici le fluide supérieur est de l'air dont la viscosité et la densité sont négligeables devant celles du liquide. Dans ces conditions, le problème se ramène à l'étude du mouvement d'un seul fluide, c'est-à-dire le liquide.

### 3.2.1 Modèle singulier

Seules les vitesses d'entraînement suffisamment faibles pour que l'écoulement reste parallèle et stationnaire sont considérées. Les équations sont réduites à un problème de Stokes stationnaire portant uniquement sur la composante longitudinale de la vitesse du liquide et dans lequel la pression n'intervient pas, celle-ci étant constante suivant l'axe  $Oy$  :

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (3.2.1)$$

La contrainte de divergence nulle est vérifiée comme conséquence du caractère monodimensionnel du champ de vitesse. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{pour } z = +\frac{h}{2}, \quad (3.2.2)$$

$$v = V_0, \quad \text{pour } z = -\frac{h}{2}, \quad (3.2.3)$$

$$v = 0, \quad \text{pour } x = \pm \frac{a}{2}, \quad (3.2.4)$$

où  $\varepsilon$  est la viscosité interfaciale de cisaillement dont la dimension est une force par unité de longueur. Une singularité du même type que pour la cavité entraînée est présente dans les coins inférieurs où le fond coulisse sous les parois du canal.

### 3.2.2 Régularisation

Afin de régulariser, le problème la condition de vitesse est filtrée par un polynôme  $f_n(x) = 1 - (2x/a)^{2n}$  de degré  $2n$ . La longueur de filtrage  $\delta x$  associée à  $f_n$  est évaluée de la même manière qu'en section 3.1.2 et varie comme  $-\frac{a}{4n} \ln(1 - .95)$  pour  $n$  suffisamment grand. Les conditions aux limites deviennent :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{pour } z = +\frac{h}{2}, \quad (3.2.5)$$

$$v = \left(1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^{2n}\right) V_0, \quad \text{pour } z = -\frac{h}{2}, \quad (3.2.6)$$

$$v = 0, \quad \text{pour } x = \pm \frac{a}{2}. \quad (3.2.7)$$

La régularisation utilisée pour la cavité entraînée est  $(f_n(x))^2$ . La présence de l'exposant 2 assure la compatibilité avec la contrainte de divergence en obligeant  $\frac{\partial u}{\partial x}$  à s'annuler dans les coins. Ceci n'est pas nécessaire pour le canal car l'incompressibilité de l'écoulement est toujours vérifiée par la solution : en effet la seule composante non nulle de la vitesse,  $v$ , ne dépend que de  $x$  et  $z$ .

### 3.2.3 Glissement

L'autre type de conditions explorées pour lever la singularité de vitesse est la prise en compte d'un glissement par l'utilisation de conditions de Navier sur les parois solides. Les conditions aux limites sont remplacées par :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{pour } z = +\frac{h}{2}, \quad (3.2.8)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = k(v - V_0), \quad \text{pour } z = -\frac{h}{2}, \quad (3.2.9)$$

$$\mp \mu \frac{\partial v}{\partial x} = k v, \quad \text{pour } x = \pm \frac{a}{2}. \quad (3.2.10)$$

### 3.2.4 Paramètres adimensionnels

Les équations sont adimensionnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = a \hat{x}, \\ z = a \hat{z}, \\ v = V_0 \hat{v}, \end{cases}$$

où la largeur du canal  $a$  est choisie comme longueur de référence, la vitesse du couvercle  $V_0$  comme vitesse de référence. L'écriture des équations en variables adimensionnées (en oubliant le ^) donne :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (3.2.11)$$

associées aux conditions aux limites :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = Vi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{pour } z = +\frac{A_a}{2}, \quad (3.2.12)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} v = 1, & \text{pour } z = -\frac{A_a}{2}, \quad (\text{non glissement}), \end{array} \right. \quad (3.2.13)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{ou} \\ v = (1 - (2x)^{2n}), & \text{pour } z = -\frac{A_a}{2}, \quad (\text{régularisation}), \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{ou} \\ l_s \frac{\partial v}{\partial z} = (1 - v), & \text{en } z = -\frac{A_a}{2}, \quad (\text{glissement uniforme}), \end{array} \right. \quad (3.2.15)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} v = 0, & \text{pour } x = \pm \frac{1}{2}, \quad (\text{non glissement}), \end{array} \right. \quad (3.2.16)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{ou} \\ \mp l_s \frac{\partial v}{\partial x} = v, & \text{en } x = \pm \frac{1}{2}, \quad (\text{glissement uniforme}). \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

$$(3.2.18)$$

Trois paramètres adimensionnels apparaissent,  $Vi = \frac{\varepsilon}{a\mu}$  le rapport de la viscosité d'interface  $\varepsilon$  à la viscosité du fluide  $\mu$  multipliée par la longueur caractéristique  $a$ , la longueur de glissement adimensionnée  $l_s = \frac{\mu}{ka}$  et le rapport d'aspect  $A_a = \frac{h}{a}$ .

$Vi$  quantifie la viscosité relative de l'interface devant la viscosité du fluide dans le volume rapportée à la longueur caractéristique du canal. Le rapport des viscosités  $\frac{\varepsilon}{\mu}$  possède donc la dimension d'une longueur. Cette longueur correspond à la longueur caractéristique de dissipation interfaciale sur laquelle la rigidité de l'interface devient non négligeable. Les gradients de vitesse interfaciale suivant la direction tangente à l'interface  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  sont dissipés par l'interface si la vitesse varie sur une échelle de longueur au plus de l'ordre de  $\frac{\varepsilon}{\mu}$ . Le fluide ressent alors localement l'interface comme une paroi rigide. Si la longueur caractéristique du canal  $a$  est plus petite que  $\frac{\varepsilon}{\mu}$ ,  $Vi > 1$ , alors l'interface réagit à tout gradient de vitesse dans celle-ci. Pour  $Vi \gg 1$ , l'interface se comporte globalement comme une paroi rigide à laquelle le fluide adhérerait.

Le rapport d'aspect  $A_a$  caractérise la profondeur relative du canal.

### 3.3 Convection thermique de Rayleigh-Bénard avec parois diffusives

La configuration de Rayleigh-Bénard ici présentée (c.f. figure 3.3) est une extension du problème classique à la prise en compte de parois latérales diffusives. Elle se présente comme une cavité rectangulaire, de hauteur  $H$  et de longueur  $L$  contenant de l'air. Celui-ci est soumis à un écart de température par les parois horizontales maintenues aux températures constantes  $T_c$  en bas et  $T_f$  en haut avec  $T_c > T_f$ . Les parois verticales sont constituées d'une petite épaisseur

d'un matériau conducteur recouvert d'un isolant sur sa face externe. Le fluide à l'intérieur du domaine est directement au contact de la partie conductrice des parois verticales.

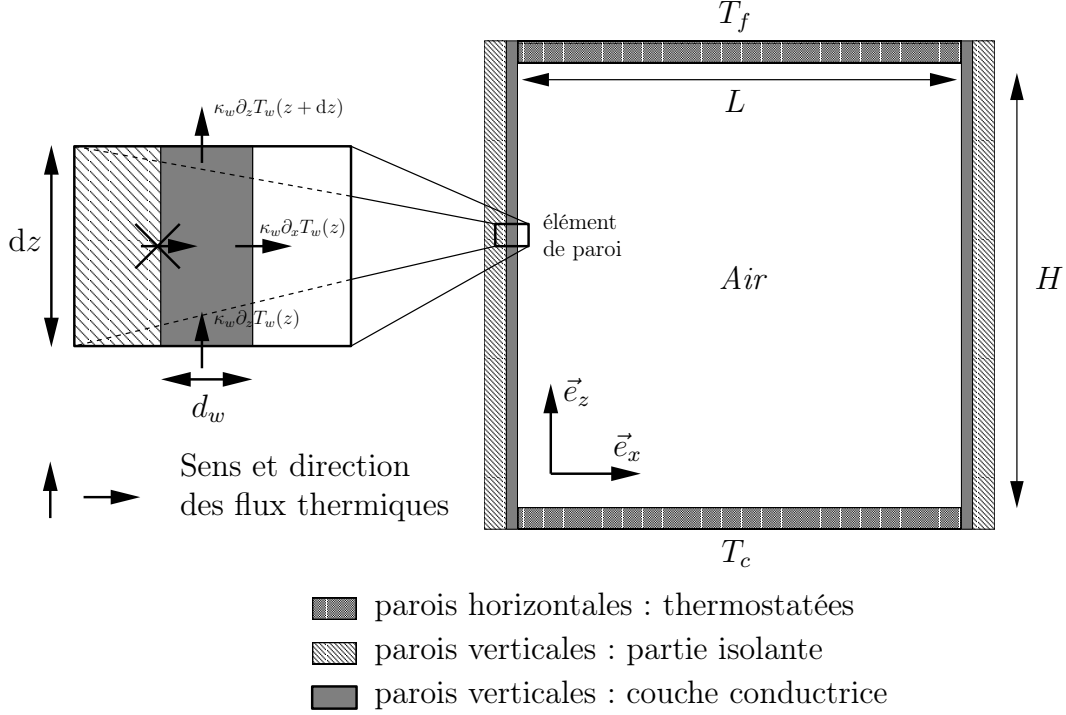


FIGURE 3.3 – Rayleigh-Bénard confiné par des parois latérales diffusives.

### 3.3.1 Modélisation

Le mouvement du fluide est induit par la poussée d'Archimède qui résulte des gradients thermiques. Pour en tenir compte, il est nécessaire d'introduire la dilatabilité du fluide dans les équations. Les écarts de température sont supposés suffisamment faibles pour que la densité dépende linéairement de la température,  $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$  avec  $T_0 = \frac{T_c + T_f}{2}$ . Les équations de Navier-Stokes sont développées au premier ordre lorsque les champs sont écrits en terme d'écart à l'état conductif pour lequel le fluide est au repos et le champ de température varie linéairement en  $z$ . Toutes les caractéristiques physiques du fluide autres que la densité sont donc considérées comme étant indépendantes de la température. Ceci conduit à l'approximation de Boussinesq :

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad (3.3.1)$$

$$\rho_0 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 \beta (T - T_0) g + \mu \Delta w, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.3.3)$$

$$\rho_0 C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T, \quad (3.3.4)$$

où  $C_p$  est la capacité calorifique massique à pression constante et  $\lambda$  la conductivité thermique. L'état hydrostatique étant découplé de la dynamique, il est soustrait des équations. Le terme  $\rho_0 g$  n'apparaît pas dans l'équation et  $P$  ne contient que la partie dynamique de la pression.

Les parois latérales sont modélisées d'une manière similaire à celle introduite par Catton [26]. En considérant que l'épaisseur du matériau conducteur est négligeable devant sa longueur ( $d_w \ll H$ ), sa température  $T_w$  est constante suivant  $x$ . Le bilan local des flux de chaleur d'un élément conducteur de hauteur  $dz$  s'écrit alors en  $x = -\frac{L}{2}$  (c.f figure 3.3) :

$$\kappa_w \frac{\partial T_w(z)}{\partial x} = \kappa_w d_w \frac{1}{dz} \left( \frac{\partial T_w}{\partial z}(z + dz) - \frac{\partial T_w}{\partial z}(z) \right) \simeq \kappa_w d_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2}(z). \quad (3.3.5)$$

En égalisant les températures et les flux de chaleur à l'interface,  $T = T_w$  et  $\kappa_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ , la relation (3.3.5) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\kappa_w d_w}{\kappa} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3.3.6)$$

où  $\kappa_w$  et  $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p}$  sont respectivement la diffusivité thermique du mur et la diffusivité thermique du fluide.

Les conditions aux limites utilisées sont donc :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.3.7)$$

$$u = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}, \quad (3.3.8)$$

$$w = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.3.9)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}, \quad (3.3.10)$$

$$\mp \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\kappa_w d_w}{\kappa} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.3.11)$$

$$T = T_c \quad \text{en } z = -\frac{H}{2}, \quad (3.3.12)$$

$$T = T_f \quad \text{en } z = +\frac{H}{2}. \quad (3.3.13)$$

### 3.3.2 Paramètres adimensionnels

Les équations sont adimensionnées par rapport à la hauteur  $H$  du domaine, qui est l'échelle de longueur du gradient thermique imposé. La température réduite est  $\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$  avec  $\Delta T = T_c - T_f$ . Les vitesses sont rapportées à la vitesse de Boussinesq  $u_b = \sqrt{g\beta\Delta T H}$ , qui correspond à la vitesse de chute d'une particule fluide de compressibilité  $\beta$ , soumise à un gradient de



température  $\frac{\Delta T}{H}$  dans le champ de gravité  $g$ . Le temps de référence est  $\frac{H}{u_b}$ , la pression de référence  $\rho_0 u_b^2$ . Le passage aux variables adimensionnées s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = H \hat{x}, \\ z = H \hat{z}, \\ t = \frac{H}{u_b} \hat{t}, \\ u = u_b \hat{u}, \\ w = u_b \hat{w}, \\ P = \rho_0 u_b^2 \hat{p}, \\ T = \Delta T \theta + T_0. \end{array} \right.$$

Les équations deviennent (en omettant le  $\hat{\phantom{x}}$ ) :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta u, \quad (3.3.14)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \theta + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta w, \quad (3.3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.3.16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta \theta, \quad (3.3.17)$$

et les conditions aux limites :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2}, \quad (3.3.18)$$

$$u = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.3.19)$$

$$w = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2}, \quad (3.3.20)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.3.21)$$

$$\mp \frac{\partial T}{\partial x} = C_w \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2}, \quad (3.3.22)$$

$$\theta = \mp \frac{1}{2} \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.3.23)$$

$$(3.3.24)$$

Quatre paramètres sans dimension apparaissent, le nombre de Rayleigh  $Ra = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ , le coefficient de diffusivité de la paroi  $C_w = \frac{\kappa_w d_w}{\kappa H}$  et enfin  $A_H = \frac{L}{H}$  le rapport d'aspect.

Le nombre de Rayleigh est le rapport du carré de la vitesse de Boussinesq au produit des vitesses de diffusion visqueuse et thermique,  $\frac{\nu}{H}$  et  $\frac{\kappa}{H}$  ; il caractérise l'intensité de la convection thermique. Celle-ci dépend de trois phénomènes, la poussée d'Archimède à l'origine du mouvement, la diffusion visqueuse et la diffusion thermique ; ces deux diffusions entrent en compétition avec le terme de flottaison et en limitent l'effet. Une vitesse de Boussinesq importante résulte d'un fort gradient de température, d'une grande dilatabilité du fluide ou d'un champ gravitationnel intense. Sur son trajet une particule fluide chauffée perd de l'énergie par diffusion visqueuse et par diffusion thermique en s'adaptant à la température du fluide qui l'entoure. Si la diffusion thermique est trop importante, la poussée d'Archimède n'agit pas assez longtemps pour que le mouvement perdure. Si la diffusion visqueuse est trop importante, la particule fluide est suffisamment ralentie pour que la diffusion thermique agisse, supprimant la poussée d'Archimède. Le seuil de transition de l'état conductif vers l'état convectif a lieu pour un nombre de Rayleigh  $Ra_c > 0$  qui correspond à une poussée d'Archimède non compensée par les effet dissipatifs.

Le nombre de Prandtl est le rapport des vitesses de diffusion. C'est une caractéristique intrinsèque du fluide étudié. Il est directement relié à l'épaisseur relative des couches limites visqueuse et thermique. Un petit nombre de Prandtl signifie que la diffusion thermique est très efficace, le champ de température est alors découplé du champ de vitesse et correspond à l'état conductif. Un grand nombre de Prandtl signifie que le champ de température est très sensible au champ de vitesse par le biais de la convection.

Le coefficient de diffusivité de la paroi,  $C_w$ , caractérise les échanges thermiques entre le fluide et les parois verticales. Celles-ci transportent par conduction de la chaleur échangée avec le fluide, ce qui constitue un troisième mécanisme de transport de chaleur de la paroi froide vers la paroi chaude outre la conduction et la convection dans le fluide. Pour  $C_w = 0$  la condition décrivant une paroi adiabatique est retrouvée, tandis que, pour  $C_w \rightarrow +\infty$ , le profil de température devient linéaire, la paroi est parfaitement conductrice.

Le rapport d'aspect  $A_H$  caractérise l'allongement horizontal.

## 3.4 Cuve différentiellement chauffée

La dernière configuration présentée décrit le mouvement d'un fluide contenu dans une cuve de longueur  $L$  et de hauteur  $H$  soumise à un gradient de température par ses parois verticales. Le mur chaud est maintenu uniformément à la température  $T_c$  et le mur froid à la température  $T_f$  (c.f. figure 3.4). Ce problème possède les caractéristiques importantes rencontrées en modélisation des écoulements thermocapillaires. La surface libre subit le gradient de température imposé par les murs. La présence des coins (chaud et froid) est responsable de l'existence de deux singularités de vorticité pour le modèle classique. Le coin froid engendre de petites échelles par le couplage entre le cisaillement à l'interface, directement proportionnel aux gradients de température (effet Marangoni) et la convection du champ de température qui intensifie les gradients thermiques et donc la convection.

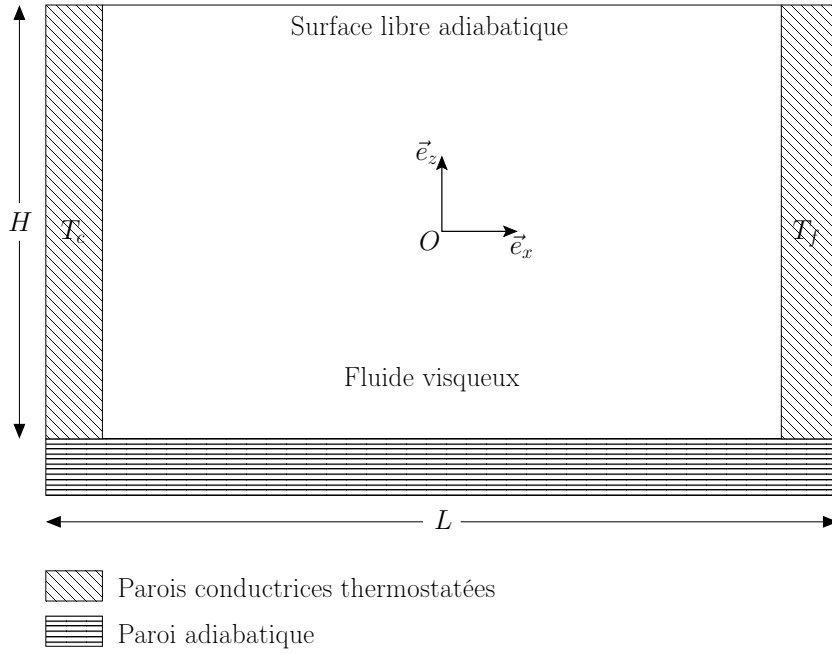


FIGURE 3.4 – Cuve différentiellement chauffée.

### 3.4.1 Modèle classique

Pour des gradients de température modérés, la tension de surface  $\sigma$  dépend linéairement de la température,  $\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0)$ , où  $\gamma$  est le coefficient de variation de tension superficielle par degré Kelvin et  $T_0 = \frac{T_c + T_f}{2}$  la température moyenne. Sous l'hypothèse que les forces en volume sont négligeables devant les forces en surface (canal peu profond), la poussée d'Archimède peut être négligée devant les forces de Marangoni. En supposant que la courbure de l'interface est négligeable ( $\frac{\gamma(T_c - T_f)}{\sigma_0} = Ca \ll 1$ ), le domaine étudié sera de forme rectangulaire. Enfin, en supposant que l'écart de température est suffisamment faible pour considérer la densité et la viscosité du fluide constantes, les équations s'écrivent :

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad (3.4.1)$$

$$\rho_0 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta w, \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.4.3)$$

$$\rho_0 C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T. \quad (3.4.4)$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.4.5)$$

$$u = 0 \quad \text{en } z = -\frac{H}{2}, \quad (3.4.6)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (condition de Marangoni),} \quad (3.4.7)$$

$$w = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.4.8)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}, \quad (3.4.9)$$

$$T = T_c \quad \text{en } x = -\frac{L}{2}, \quad (3.4.10)$$

$$T = T_f \quad \text{en } x = +\frac{L}{2}, \quad (3.4.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}. \quad (3.4.12)$$

### 3.4.2 Régularisation

La condition de Marangoni employée dans le modèle classique comporte une singularité de vorticité aux coins chaud et froid. Pour s'affranchir de cette difficulté, il est courant de filtrer le gradient de température par le même polynôme de régularisation,  $f_n(x) = (1 - (2x/L)^{2n})^2$ , qu'en section 3.2.2. La longueur de filtrage introduite varie comme  $\frac{1}{n}$  au voisinage des coins pour  $n$  assez grand. Seule la condition de Marangoni est modifiée :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^{2n}\right)^2 \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (condition de Marangoni régularisée),} \quad (3.4.13)$$

les autres conditions aux limites restent inchangées.

### 3.4.3 Viscositt  d'interface

La prise en compte de la viscositt  de l'interface fait apparaître un terme en dérivée seconde de la vitesse dans le bilan des contraintes à la surface libre. L'équation (3.4.7) devient :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } z = +\frac{H}{2} \text{ (condition de Marangoni étendue),} \quad (3.4.14)$$

où  $\eta_s$  est cette fois-ci la viscositt  élongationnelle de l'interface. Le terme en dérivée seconde régularise la vorticité dans les coins en compensant le gradient thermique. La longueur de filtrage correspondante peut être tirée de la condition de Marangoni en considérant que, sur cette échelle près du coin, le cisaillement est négligeable dans l'équation (3.4.14), soit  $l_f \sim \frac{\eta_s u}{\gamma(\Delta T')}$ ,

où  $\Delta T'$  est l'échelle thermique dans la zone de filtrage. L'évaluation quantitative de  $l_f$  nécessite de connaître la vitesse de référence. Or la rétroaction entre l'échelle thermique et l'échelle de vitesse ne permet pas d'obtenir cette dernière sans hypothèse supplémentaire. Il faudra employer le calcul numérique pour la déterminer.

### 3.4.4 Glissement

Les conditions d'adhérence aux parois solides peuvent être remplacées par des conditions de Navier afin de tenir compte du glissement. Celui-ci peut être associé aux conditions classiques de Marangoni ou aux conditions de Marangoni étendues à la prise en compte de la viscosité de l'interface. Les conditions de vitesse sur les parois solides deviennent alors :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.4.15)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = k u \quad \text{en } z = -\frac{H}{2}, \quad (3.4.16)$$

$$\mp \mu \frac{\partial w}{\partial x} = k w \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \quad (3.4.17)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{H}{2}, \quad (3.4.18)$$

où  $k$  est le coefficient de friction. Le glissement non uniforme n'est pas considéré.

### 3.4.5 Paramètres adimensionnels

Les variables sont adimensionnées par rapport à la hauteur  $H$  du domaine, la vitesse de diffusion thermique  $u_{th} = \frac{\kappa}{H}$ , le temps de diffusion thermique  $\frac{H^2}{\kappa}$ , l'échelle de pression dynamique résultant de la vitesse de diffusion thermique  $\rho_0 u_{th}^2$  et la température réduite  $\theta = \frac{T-T_0}{\Delta T}$  associée à l'échelle des températures  $\Delta T = T_c - T_f$ . Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = H \hat{x}, \\ z = H \hat{z}, \\ t = \frac{H^2}{u_{th}} \hat{t}, \\ u = u_{th} \hat{u}, \\ w = u_{th} \hat{w}, \\ P = \rho_0 u_{th}^2 \hat{p}, \\ T = \Delta T \theta + T_0. \end{array} \right.$$

Les équations sous forme adimensionnée (lorsque le  $\hat{\cdot}$  est omis) s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr\Delta u, \quad (3.4.19)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Pr\Delta w, \quad (3.4.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.4.21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta\theta. \quad (3.4.22)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$u = 0 \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2}, \quad (3.4.23)$$

$$\left[ \begin{array}{l} u = 0 \\ \text{ou} \end{array} \right. \quad \text{en } z = -\frac{1}{2} \text{ (non glissement),} \quad (3.4.24)$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_s \frac{\partial u}{\partial z} = u \end{array} \right. \quad \text{en } z = -\frac{1}{2} \text{ (glissement uniforme),} \quad (3.4.25)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{1}{2} \text{ (condition de Marangoni),} \quad (3.4.26)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} (1 - (2x)^{2n})^2 \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{1}{2} \text{ (condition de Marangoni régularisée),} \quad (3.4.27)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} + Vi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad \text{en } z = +\frac{1}{2} \text{ (condition de Marangoni étendue),} \quad (3.4.28)$$

$$\left[ \begin{array}{l} w = 0 \end{array} \right. \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2} \text{ (non glissement),} \quad (3.4.29)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \mp l_s \frac{\partial w}{\partial x} = w \end{array} \right. \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2} \text{ (glissement uniforme),} \quad (3.4.30)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.4.31)$$

$$\theta = \mp \frac{1}{2} \quad \text{en } x = \pm \frac{A_H}{2}, \quad (3.4.32)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.4.33)$$

La formulation adimensionnelle fait apparaître cinq paramètres sans dimension, le nombre de Prandtl  $Pr$ , le nombre de Marangoni  $Ma = \frac{\gamma \Delta T H}{\mu \kappa}$ , la viscosité interfaciale adimensionnelle  $Vi = \frac{\varepsilon}{\mu H}$ , la longueur de glissement adimensionnelle  $l_s = \frac{\mu}{kH}$  et le rapport d'aspect  $A_H = \frac{L}{H}$ .

Les nombres de Prandtl ayant déjà été discutés en section 3.3, la viscosité interfaciale adimensionnelle  $Vi$  en section 3.2 et la longueur de glissement adimensionnelle  $l_s$  en section 3.2, il n'est pas nécessaire d'en ici détailler la signification.

Le nombre de Marangoni est le rapport de la vitesse induite par la contrainte thermocapillaire associée à une variation de tension superficielle  $\gamma\Delta T$  et une viscosité  $\mu$  à la vitesse de diffusion thermique  $\frac{\kappa}{H}$ . Il peut aussi être vu comme  $Ma = Re_{thc}Pr$ , où  $Re_{thc} = \frac{\gamma\Delta TH}{\mu\nu}$  est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse thermocapillaire. Ainsi formulé le nombre de Marangoni mesure la compétition entre les effets inertiels issus de la force motrice résultant de la contrainte thermocapillaire et la diffusion visqueuse (Reynolds thermocapillaire) que viennent pondérer l'épaisseur relative des couches limites visqueuses et thermiques par l'intermédiaire de  $Pr$ . Si le nombre de Prandtl est suffisamment petit la thermique, est diffusive et donc découplée du champ de vitesse. L'échelle de vitesse observée résulte alors directement des échelles de référence de la configuration. Si le nombre de Prandtl est assez grand pour que le champ de vitesse convecte le champ de température, les gradients de température sont intensifiés donnant naissance à de petites échelles de vitesse, ceci pouvant être rapproché d'un écoulement inertiel (grand nombre de Reynolds).

Le rapport d'aspect  $A_H$  caractérise l'allongement horizontal de la cavité.

### 3.5 Formulation adimensionnelle généralisée

Afin de faciliter les développements numériques qui suivront, il est intéressant de regrouper les configurations qui seront étudiées dans une formulation adimensionnelle généralisée.

Les équations de Navier-Stokes sont ramenées à la forme adimensionnelle générale :

$$c_a \frac{d\vec{V}}{dt} = -c_p \vec{\nabla} p + c_A \theta \vec{e}_z + d_v \Delta \vec{V}, \quad (3.5.1)$$

$$c_p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0, \quad (3.5.2)$$

$$c_T \frac{d\theta}{dt} = c_T d_T \Delta \theta, \quad (3.5.3)$$

qui s'appliquent pour  $(x, z) \in \Omega \equiv [-\frac{L_x}{2}, +\frac{L_x}{2}] \times [-\frac{L_z}{2}, +\frac{L_z}{2}]$ .  $\vec{V}$  désigne la vitesse sous forme vectorielle.  $c_a$  est le coefficient de l'accélération,  $c_p$  celui du terme de pression (qui met en évidence le lien entre la pression et la divergence),  $c_A$  le coefficient du terme de poussée d'Archimède,  $d_v$  celui de la diffusion visqueuse,  $c_T$  le coefficient de l'évolution temporelle du champ de température,  $d_T$  celui de la diffusion thermique, enfin  $L_x$  et  $L_z$  sont les coefficient d'extension horizontale et verticale. Les coefficients notés  $c$  sont de nature purement utilitaire. Ils permettent de sélectionner les termes apparaissant dans les différents problèmes et non pas de signification physique particulière. Le tableau 3.1 présente les valeurs des différents coefficients correspondant aux configurations décrites dans ce chapitre.

Cette formulation fournit un cadre suffisamment large pour assurer la consistance des discussions de la partie suivante dans chacun des écoulements abordés. Il faut rajouter à ceci qu'il

Configuration	$\vec{V}$	$c_a$	$c_p$	$c_A$	$c_T$	$d_v$	$d_T$	$L_x$	$L_z$
Cavité entraînée	$u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$	1	1	0	0	$Re$	0	1	$A_L$
Viscosimètre	$v\vec{e}_y$	0	0	0	0	1	0	1	$A_a$
Rayleigh-Bénard	$u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$	1	1	1	1	$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$	$\frac{1}{\sqrt{Ra Pr}}$	$A_H$	1
Cuve thermocapillaire	$u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$	1	1	0	1	$Pr$	1	$A_H$	1

TABLE 3.1 – Valeurs des coefficient de l'adimensionnement général exprimées pour chacune des configuration.

n'est pas nécessaire d'en faire de même pour les conditions aux limites, qui seront introduites au fur et à mesure des besoins. Les différents types de conditions aux limites discutés dans ce chapitre sont présentés sous leur forme générique au chapitre suivant par le système (4.1.8).





## Troisième partie

# Traitement numérique, validation des algorithmes



# COLLOCATION PSEUDO-SPECTRALE CHEBYSHEV

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes est présentée dans le contexte des méthodes de collocation spectrale. Tout d'abord la discrétisation temporelle et spatiale, puis le découplage de la pression sont exposés. Dans un second temps, les algorithmes mis en œuvre pour les différents types de conditions aux limites, sont développés.

## 4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

Suivant la formulation adimensionnée généralisée, introduite au chapitre précédent, les équations de Navier-Stokes, exprimant la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de la masse, et la conservation de l'énergie (lorsque celle-ci intervient dans le problème), sont formulées pour un fluide en régime incompressible sous l'approximation de Boussinesq :

$$c_a \frac{d\vec{V}}{dt} = -c_p \vec{\nabla} p + c_A \theta \vec{e}_z + d_v \Delta \vec{V}, \quad (4.1.1)$$

$$c_p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$c_T \frac{d\theta}{dt} = c_T d_T \Delta \theta. \quad (4.1.3)$$

Il est par ailleurs commode de se limiter à 2 dimensions d'espace, bien que les algorithmes présentés puissent être appliqués à 3 dimensions. Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées

deviennent :

$$c_a \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -c_p \frac{\partial p}{\partial x} + d_v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (4.1.4)$$

$$c_a \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -c_p \frac{\partial p}{\partial w} + d_v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + c_A \theta, \quad (4.1.5)$$

$$c_p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (4.1.6)$$

$$c_T \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = c_T d_T \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right), \quad (4.1.7)$$

avec  $x$ ,  $z$  et  $t$ , les positions verticale, horizontale et le temps sans dimension. Pour simplifier les développements numériques qui vont suivre il sera considéré, dans ce chapitre, que tous les coefficients  $c$  et  $d$  sont égaux à 1. Les différents types de conditions aux limites (sur  $u, w$  et  $\theta$ ) susceptibles d'être employées sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_\eta \cdot g = \gamma_\eta(\tau) & \text{(Dirichlet),} \\ \beta_\eta \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} = \gamma_\eta(\tau) & \text{(Neumann),} \\ \alpha_\eta \cdot g + \beta_\eta \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} = \gamma_\eta(\tau) & \text{(Robin : mixtes),} \\ \alpha_\eta(\tau) \cdot g + \beta_\eta(\tau) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} = \gamma_\eta(\tau) & \text{(non uniformes),} \\ \alpha_\eta \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} + \beta_\eta \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} = \gamma_\eta(\tau) & \text{(mixtes en dérivées).} \end{array} \right. \quad (4.1.8)$$

La variable  $g$  représente le champ  $u$ ,  $w$  ou  $\theta$ . Les indices  $\eta$  et  $\tau$  représentent respectivement, les directions normale et tangente à la frontière courante - à laquelle s'applique la condition. Les frontières sont identifiées par leur normale : les parois verticales (pour lesquelles  $\tau = z$  et  $\eta = x$ ), sont donc désignées comme les frontières associées à la direction horizontale ( $\vec{e}_x$ ). Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de la position le long de la frontière, les conditions sont dites non uniformes. Cette distinction ne s'applique pas à  $\gamma$  dont le comportement n'influe pas sur la nature des opérateurs, ce qui sera développé en détail dans la sous-section 4.2.1.

#### 4.1.1 Discrétisation temporelle

En regroupant le gradient de pression et les forces volumiques dans un terme source  $\mathcal{S}$ , les équations (4.1.4), (4.1.5) et (4.1.7), peuvent être écrites à l'instant  $t_n$  comme :

$$\frac{\partial g^n}{\partial t} = L(g^n) + NL(g^n) + \mathcal{S}^n. \quad (4.1.9)$$

La discrétisation temporelle s'effectue de manière classique<sup>(1)</sup> suivant un schéma d'Adams-Bashforth/Euler retardé à l'ordre 2 (AB/ER2) avec un pas de temps constant  $\delta t$ . Ce qui se traduit au temps  $n + 1$  par les approximations suivantes :

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial t} - L(g^{n+1}) = \frac{3g^{n+1} - 4g^n + g^{n-1}}{2\delta t} - L(g^{n+1}) + \mathcal{O}(\delta t^2), \quad (4.1.10)$$

pour la partie linéaire (ER2), et :

$$NL(g^{n+1}) = 2NL(g^n) - NL(g^{n-1}) + \mathcal{O}(\delta t^2), \quad (4.1.11)$$

pour la partie non linéaire (AB2).

Dans ce travail la partie linéaire s'identifie aux termes diffusifs  $L(g^n) \equiv \Delta g^n$ , et la partie non linéaire aux termes de convection de  $g$  par le champ de vitesse  $NL(g^n) \equiv u \frac{\partial g^n}{\partial x} + w \frac{\partial g^n}{\partial z}$ , où  $g = u, w$  ou  $\theta$ .

Substituer dans (4.1.9) les différents termes par leur approximation discrète permet d'exprimer  $g^{n+1}$  en fonction de  $g^n$  et  $g^{n-1}$ ,

$$\underbrace{\left(\Delta - \frac{3}{2\delta t}\right)}_{\text{Opérateur de Helmholtz}} g^{n+1} = \frac{-4g^n + g^{n-1}}{2\delta t} + 2NL(g^n) - NL(g^{n-1}) + \mathcal{S}^{n+1}. \quad (4.1.12)$$

Le calcul des champs au temps  $n + 1$  nécessite la résolution d'autant d'équations de Helmholtz qu'il y a de champ, et suppose que le terme source est connu à cet instant. Celui-ci est composé des forces de pression et des forces en volume,  $\mathcal{S}^{n+1} = \mathcal{S}_p^{n+1} + [\theta \delta_{wg}]^{n+1}$ , où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. La pression étant découplée par l'algorithme de projection-diffusion qui sera détaillé dans la section suivante,  $\mathcal{S}_p^{n+1}$  sera ici supposé connu. Le terme de force en volume,  $f_{vol} = \theta \delta_{wg}$ , tient compte de la poussée d'Archimède. Le système d'équations à résoudre est (4.1.4-4.1.7). Le traitement individuel de chaque composante se résume au problème de Helmholtz générique suivant :

$$(\Delta - a) u = f, \quad a > 0. \quad (4.1.13)$$

Pour le premier type de configurations, les composantes de la vitesse sont calculées en suivant l'ordre naturel des directions du repère : la composante  $u$  suivant  $\vec{e}_x$ , puis la composante  $w$  suivant  $\vec{e}_z$ . Si la thermique intervient, il convient de calculer en premier  $\theta^{n+1}$ . Le calcul de la vitesse s'effectue alors comme pour l'autre type, les termes sources étant connus (car dépendant uniquement de la température).

#### 4.1.2 Découplage vitesse-pression : méthode de projection-diffusion

Dans la section précédente, il a été mis en évidence que le gradient de pression doit être connu au temps  $t_{n+1}$  pour pouvoir calculer les composantes de la vitesse à cet instant, et que

1. voir annexe A.8 dans Batoul [9] et thèse d'état de Le Quéré [96].

ceci s'effectue par la résolution d'une équation de Helmholtz pour chacune d'entre elles. La fermeture de chaque équation nécessite la donnée d'une relation supplémentaire par frontière (4 conditions aux limites en 2 dimensions). Toutefois le système comporte 3 équations sur la vitesse, les deux équations de Helmholtz (4.1.4-4.1.5), et la conservation de la masse (4.1.6). Ces équations possèdent trois inconnues : les composantes de la vitesse  $u$  et  $w$ , ainsi que le champ de pression  $p$ . Il y a en tout 3 équations pour trois inconnues, mais seulement 2 jeux de conditions aux limites, sur  $u$  et  $w$  et par conséquent aucune pour la pression. C'est le bilan de quantité de mouvement aux frontières qui permet de s'affranchir des conditions sur la pression.

Du point de vue physique, l'incompressibilité signifie que les parties convective et acoustique du champ de vitesse sont découplées. Localement, dans un volume macroscopique et à l'échelle de temps de la convection, le bilan des flux de quantité de mouvement des molécules du fluide est nul. La vitesse du fluide, notée  $v_f$  et la vitesse du son, notée  $C$ , vérifient :  $v_f \ll C$  : le passage d'une onde acoustique perturbe donc ce bilan pendant un temps assez court pour être négligé. La pression (expression de ce bilan), s'adapte quasi-instantanément (à la vitesse du son), de manière à ce que la contrainte de divergence nulle soit respectée. La pression peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange relatif à la conservation de la masse. L'algorithme de projection-diffusion, proposé par Batoul *et al.* [10], s'inspire de ce mécanisme pour reconstruire à chaque pas de temps le champ de pression. Il est à présent décrit suivant la formulation introduite par Leriche et Labrosse [98](<sup>2</sup>).

Il est nécessaire de distinguer l'intérieur du domaine  $\overset{\circ}{\Omega}$  de sa frontière  $\partial\Omega$ , le domaine total sera noté  $\bar{\Omega} \equiv \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ . En introduisant  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Delta \vec{V}$ , le champ d'accélération sur  $\overset{\circ}{\Omega}$ ,  $\vec{a}_B$  le champ d'accélération sur  $\partial\Omega$ , les équations (4.1.4-4.1.6) deviennent :

$$\vec{a} + \vec{\nabla} p = \vec{f}, \quad \text{dans } \overset{\circ}{\Omega}; \quad (4.1.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0, \quad \text{dans } \bar{\Omega}; \quad (4.1.15)$$

$$\vec{a}_B = \left[ \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \Delta \vec{V} \right) \cdot \vec{n} \right] \vec{n}, \quad \text{dans } \partial\Omega. \quad (4.1.16)$$

La source  $f$  contient les termes non linéaires et les forces en volume. La première étape consiste à projeter les équations sur un espace à divergence nulle. La discrétisation des équations (4.1.15) et (4.1.16) permet d'obtenir la relation suivante :

$$]\partial_x[ a_x + ]\partial_z[ a_z = -\text{Div}([\vec{a}_B]), \quad (4.1.17)$$

où  $]\partial_x[$  et  $]\partial_z[$  sont les opérateurs discrets de dérivation restreints aux points intérieurs (les coefficients correspondant aux points de frontière sont annulés),  $\text{Div}(\cdot)$  l'opérateur de divergence

---

2. L'algorithme de projection diffusion est très proche des méthodes de time-splitting introduites par Karniadakis *et al.* [84], toutefois la prise en compte du terme de dérivée temporelle s'effectue de manière différente, sans schéma temporel, ce qui permet à la projection diffusion d'éviter les inconsistences de ces dernières. Une discussion détaillée et des comparaisons de la projection-diffusion aux schémas d'Uzawa et de time-splitting peut être trouvée dans Leriche et Labrosse [98].

discret et  $[\vec{a}_B]$  le champ vectoriel discret étendu à  $\bar{\Omega}$ .

$$[\vec{a}_B]_x = \begin{cases} \vec{a}_B \cdot \vec{e}_x & \text{sur les frontières verticales,} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (4.1.18)$$

$$[\vec{a}_B]_z = \begin{cases} \vec{a}_B \cdot \vec{e}_z & \text{sur les frontières horizontales,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.1.19)$$

En introduisant  $] \vec{f} [$ , la source restreinte à  $\bar{\Omega}$  de la manière suivante :

$$] \vec{f} [ _x = \begin{cases} 0 & \text{sur les frontières verticales,} \\ \vec{f}_x & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (4.1.20)$$

$$] \vec{f} [ _z = \begin{cases} 0 & \text{sur les frontières horizontales,} \\ \vec{f}_z & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (4.1.21)$$

l'application de la divergence, restreinte aux points intérieurs, à l'équation (4.1.14), conduit à :

$$] \partial_x [ \cdot \partial_x p + ] \partial_z [ \cdot \partial_z p = \text{Div} (] \vec{f} [ + [\vec{a}_B]). \quad (4.1.22)$$

L'opérateur  $] \Delta [ = ] \partial_x [ \cdot \partial_x (.) + ] \partial_z [ \cdot \partial_z (.)$  constitue un pseudo-opérateur de Poisson pour la pression qui est inversible. Pour un domaine aux frontières indéformables, la partie non nulle de  $[\vec{a}_B]$  se limite à  $\Delta \vec{V} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ . En tenant compte de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ , il est alors possible d'extrapoler le second membre de (4.1.2) de la manière suivante :  $f^{n+1} = 2f^n - f^{n-1}$  et  $\Delta \vec{V}^{n+1} = -2\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}^n + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}^{n-1}$ . La pression à  $t_{n+1}$  s'obtient alors simplement en écrivant :

$$p^{n+1} = ] \Delta [^{-1} \text{Div} (] \vec{f}^{n+1} [ + [\vec{a}_B]^{n+1}). \quad (4.1.23)$$

Cette procédure a l'avantage d'être consistante en temps et peu coûteuse numériquement. Elle assure la convergence de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  avec le maillage. D'autre part il n'est pas nécessaire de disposer de conditions aux limites sur  $p$ , celles-ci étant remplacées par  $[\vec{a}_B]^{n+1}$ <sup>(3)</sup>. Par la suite, la décroissance de la divergence avec le maillage constituera un critère de régularité de la solution.

### 4.1.3 Opérateurs spectraux de dérivation spatiale

La discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes s'effectue par une méthode spectrale de collocation [23]. Les champs de vitesse, température et pression sont décomposés sur une base de fonctions orthogonales pour le produit scalaire. Ici, le champ sera approché dans les

---

3. Ce terme correspond à des conditions de Neumann sur la pression si le pseudo Poisson est remplacé par l'opérateur de Poisson discrétisé. L'utilisation de  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}$  comme conditions de Neumann a été proposé par Orszag *et al.* [110]. Leriche et Labrosse [98] ont montré que ces conditions ont un effet stabilisant pour le problème de Stokes.



deux directions d'espace par sa projection sur la base des polynômes de Chebyshev, tronquée aux ordres  $N_x$  et  $N_z$ . La composante  $u$  de la vitesse s'écrit alors :

$$u(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}(t) T_k(x) T_l(z), \quad x, z \in [-1, 1], \quad (4.1.24)$$

où :

$$T_p(X) = \cos(p \cdot \arccos(X)). \quad (4.1.25)$$

Les polynômes de Chebyshev peuvent aussi se définir par une relation de récurrence :

$$\begin{aligned} T_0(X) &= 1; & T_1(X) &= X; \\ & & \vdots & \\ T_p(X) &= 2X.T_{p-1}(X) - T_{p-2}(X), & p &\geq 2. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Le produit scalaire défini comme suit :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_{-1}^{+1} (\cdot) (\cdot) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (4.1.27)$$

assure l'orthogonalité des  $T_p$  :

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^{+1} T_i(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (4.1.28)$$

$$\langle T_i, T_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad (4.1.29)$$

$$\langle T_i, T_i \rangle = c_i \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} i \in \{0, 1, \dots\} \\ c_0 = 2, & c_n = 1 \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Les coefficients de  $u$  dans l'espace spectral sont obtenus par projection sur la base des  $T_p$  :

$$\tilde{u}_{kl} = \mathcal{C}_{ste} \cdot \iint_{-1}^{+1} u(x, z, t) T_k(x) T_l(z) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pour une fonction régulière, la relation suivante est vérifiée :  $(k^p l^q \cdot \tilde{u}_{kl}) \rightarrow 0$  quand  $m, n \rightarrow +\infty$ , et  $\forall p, q > 0$ . L'erreur d'approximation décroît plus rapidement que toute puissance de  $kl$ , c'est ce qui est appelé décroissance exponentielle ou précision spectrale (Canuto *et al.* [23, p. 6]).

Les dérivées à l'ordre  $r$  en temps et  $p$  et  $q$  en espace de toute fonction  $u$  développée dans cette base s'écrivent :

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \frac{\partial^r \tilde{u}_{kl}}{\partial t^r}(t) T_k(x) T_l(z), \quad (4.1.31)$$

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}(t) \frac{\partial^p T_k}{\partial x^p}(x) T_l(z), \quad (4.1.32)$$

$$\frac{\partial^q u}{\partial z^q}(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}(t) T_k(x) \frac{\partial^q T_l}{\partial z^q}(z), \quad (4.1.33)$$

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial z^q}(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}(t) \frac{\partial^p T_k}{\partial x^p}(x) \frac{\partial^q T_l}{\partial z^q}(z), \quad (4.1.34)$$

$$\forall r, p, \text{ et } q, \text{ tels que } 0 \leq r, \text{ et } \begin{cases} 0 \leq p \leq N_x \\ 0 \leq q \leq N_z \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire la décomposition en série tronquée pour les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial z^q}(x, z, t) &\approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \left\{ \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{u}_{mn}(t) \left\langle \frac{\partial^p T_m}{\partial x^p}(x), T_k(x) \right\rangle \left\langle \frac{\partial^q T_n}{\partial z^q}(z), T_l(z) \right\rangle \right\} T_k(x) T_l(z), \\ \forall p, q, \text{ tels que } &\begin{cases} 0 \leq p \leq N_x \\ 0 \leq q \leq N_z \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Pour finir, poser

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial z^q}(x, z, t) \approx \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}^{pq}(t) T_k(x) T_l(z), \quad x, z \in [-1; 1], \quad (4.1.36)$$

permet de conclure que

$$\tilde{u}_{kl}^{pq}(t) = \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{u}_{mn}(t) \left\langle \frac{\partial^p T_m}{\partial x^p}, T_k \right\rangle \left\langle \frac{\partial^q T_n}{\partial z^q}, T_l \right\rangle. \quad (4.1.37)$$

Ces relations définissent les opérateurs spectraux de dérivation associés aux différentes directions de l'espace. L'application de ces opérateurs sur un élément de l'espace spectral tronqué peut être représentée sous la forme d'une matrice carrée d'ordre  $N_x$  pour la variable  $x$ , et d'ordre  $N_z$  pour  $z$ . Soit :

$$\tilde{u}_{kl}^1(t) = \sum_{m=0}^{N_x} [\mathbf{D}_x]_{km} \tilde{u}_{ml}(t), \quad (4.1.38)$$

$$\tilde{u}_{kl}^1(t) = \sum_{n=0}^{N_z} [\mathbf{D}_z]_{kn} \tilde{u}_{kn}(t). \quad (4.1.39)$$

L'opérateur de dérivation à l'ordre  $p$  (respectivement  $q$ ), associé à une direction d'espace, est l'opérateur de dérivation première, associé à cette même direction, porté à la puissance  $p$  (respectivement  $q$ ) :

$$\tilde{u}_{kl}^p(t) = \sum_{m=0}^{N_x} [(\mathbf{D}_x)^p]_{km} \tilde{u}_{ml}(t), \quad (4.1.40)$$

$$\tilde{u}_{kl}^q(t) = \sum_{n=0}^{N_z} [(\mathbf{D}_z)^q]_{kn} \tilde{u}_{kn}(t), \quad (4.1.41)$$

$$\tilde{u}_{kl}^{pq}(t) = \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} [(\mathbf{D}_x)^p]_{km} [(\mathbf{D}_z)^q]_{ln} \tilde{u}_{mn}(t). \quad (4.1.42)$$

Enfin ces relations sont exprimées de manière discrète. Ce qui va permettre d'en déduire les opérateurs différentiels pour l'espace physique discrétisé. Une telle formulation du problème est appelée pseudo-spectrale. Le choix du support est important car il conditionne directement la précision de l'approximation par le biais de la quadrature associée. Les points de collocation ici choisis sont les points de Gauss-Lobatto, adaptés aux géométries cartésiennes :

$$\begin{cases} x_i = \cos(\frac{\pi i}{N_x}), & i = 0, \dots, N_x \text{ en } x, \\ z_j = \cos(\frac{\pi j}{N_z}), & j = 0, \dots, N_z \text{ en } z. \end{cases}$$

L'approximation spectrale d'un polynôme de degré  $N_x$  en  $x$ , et  $N_z$  en  $z$ , en quadrature de Gauss-Lobatto, est exacte sur tout le domaine aux erreurs d'arrondi près.

La projection sur l'espace spectral tronqué d'une fonction dans l'espace physique discrétisé s'écrit :

$$u(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}(t) T_k(x_i) T_l(z_j), \quad (4.1.43)$$

$$\forall i \in [0, N_x], \forall j \in [0, N_z].$$

Il en découle les relations suivantes :

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \frac{\partial^r \tilde{u}_{kl}}{\partial t^r}(t) T_k(x_i) T_l(z_j), \quad (4.1.44)$$

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}^p(t) T_k(x_i) T_l(z_j), \quad (4.1.45)$$

$$\frac{\partial^q u}{\partial y^q}(x_i, y_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}^q(t) T_k(x_i) T_l(z_j), \quad (4.1.46)$$

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial z^q}(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{u}_{kl}^{pq}(t) T_k(x_i) T_l(z_j), \quad (4.1.47)$$

$$\forall r, p, \text{ et } q, \text{ tels que } 0 \leq r, \text{ et } \begin{cases} 0 \leq p \leq N_x, \\ 0 \leq q \leq N_z, \end{cases}$$

permettant de définir les opérateurs de dérivation en espace, dans l'espace physique discrétisé :

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} [(\mathcal{D}_x)^p]_{ik} u(x_k, z_j, t), \quad (4.1.48)$$

$$\frac{\partial^q u}{\partial z^q}(x_i, y_j, t) = \sum_{l=0}^{N_z} [(\mathcal{D}_z)^q]_{jl} u(x_i, z_l, t), \quad (4.1.49)$$

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial z^q}(x_i, z_j, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} [(\mathcal{D}_x)^p]_{ik} [(\mathcal{D}_z)^q]_{jl} u(x_k, z_l, t). \quad (4.1.50)$$

En posant  $T_{ik}^x = T_k(x_i)$  et  $T_{jl}^z = T_l(z_j)$ , les matrices de passage de l'espace spectral tronqué à l'espace physique discret (qui sont les valeurs des polynômes de Chebyshev aux points de collocation), il vient  $\mathcal{D}_x = (T^x)^{-1} \mathbf{D}_x (T^x)$  et  $\mathcal{D}_z = (T^z)^{-1} \mathbf{D}_z (T^z)$ .

## 4.2 Résolution de l'équation de Helmholtz - Gestion des conditions aux limites

La formulation spectrale des opérateurs de dérivée, introduite en section 4.1.3, est maintenant utilisée dans les équations discrétisées en temps. Le problème de Helmholtz formulé selon (4.1.13) associé à des conditions aux limites du type (4.1.8) est discrétisé en espace. Pour une inconnue notée  $u$ , le problème formulé en notation indicielle s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{N_x} [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} u(x_k, z_j, t_{n+1}) + \sum_{l=0}^{N_z} [(\mathcal{D}_z)^2]_{jl} u(x_i, z_l, t_{n+1}) - a \cdot u(x_i, z_j, t_{n+1}) = f(x_i, z_j, t_{n+1}),$$

$$\forall \quad x_i, z_j \quad \in [-1, 1] \times [-1, 1]. \quad (4.2.1)$$

La notation indicielle des équations est résumée par la formulation tensorielle :

$$\left( \overbrace{(\mathcal{D}_x)^2 \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)^2}^{\Delta} - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z \right) u = f. \quad (4.2.2)$$

L'intérêt de cette écriture est de permettre la représentation de l'opérateur de Helmholtz ( $\mathcal{H} = \Delta - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z$ ), dont la matrice contiendrait  $((N_x + 1) \times (N_z + 1))^2$  coefficients dans l'espace physique discrétisé, à l'aide des deux opérateurs  $(\mathcal{D}_x)^2$  et  $(\mathcal{D}_z)^2$ , dont les représentations matricielles comportent seulement  $(N_x + 1)^2$  et  $(N_z + 1)^2$  éléments, plus la constante de Helmholtz. Le coût en temps de calcul et en espace mémoire est grandement allégé.

### 4.2.1 Conditions mixtes uniformes

Le problème considéré par la suite est celui d'une équation de Helmholtz (4.1.13), indépendante du temps, à laquelle s'ajoutent dans cette section, des conditions aux limites mixtes uniformes (voir éq. (4.1.8)) :

$$\begin{cases} \alpha_{1\pm} \cdot u(x_{|0}^{N_x}, z_j) + \beta_{1\pm} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_{|0}^{N_x}, z_j) = \gamma_{1\pm}(j), & \text{suivant } \vec{e}_x; \\ \alpha_{2\pm} \cdot u(x_i, z_{|0}^{N_z}) + \beta_{2\pm} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(x_i, z_{|0}^{N_z}) = \gamma_{2\pm}(i), & \text{suivant } \vec{e}_z; \end{cases} \quad (4.2.3)$$

$$\forall \quad i, j \quad \in [0, N_x] \times [0, N_z].$$

Dans ce cas, l'action de l'opérateur de Helmholtz dans une direction donnée est indépendante des directions restantes. La résolution du système s'effectue grâce à la tensorisation des opérateurs, selon la méthode des diagonalisations successives [63].

Il faut aussi tenir compte de conditions de compatibilité : les conditions sur  $u$  dans les deux directions doivent être vérifiées simultanément dans les coins. Ce qui impose une contrainte sur le choix des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$ . La prise en compte des conditions limites se traduit par la suppression des bords du domaine des équations à résoudre. La procédure appliquée à la direction  $\vec{e}_x$  est la même suivant  $\vec{e}_z$ .

Afin de simplifier l'écriture, les coordonnées discrètes  $x_i$  et  $z_j$  seront identifiées à leurs indices, les champs discrétisés  $g(x_i, z_j)$  désignés par  $g_{ij}$ . En utilisant les opérateurs de dérivation, les conditions aux limites en  $i = 0$  et  $i = N_x$  deviennent (suivant  $\vec{e}_x$ ) :

$$\alpha_{1-} \cdot u_{0j} + \beta_{1-} \cdot \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x)_{0k} u_{kj} = \gamma_{1-}(j) \quad (4.2.4)$$

$$\alpha_{1+} \cdot u_{N_x j} + \beta_{1+} \cdot \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x)_{N_x k} u_{kj} = \gamma_{1+}(j) \quad (4.2.5)$$

qui, après avoir isolé les points extérieurs, s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} (\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00}) \cdot u_{0j} &+ \beta_{1-} \cdot \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{0k} u_{kj} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x} \cdot u_{N_x j} = \gamma_{1-}(j) \\ (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \cdot u_{N_x j} &+ \beta_{1+} \cdot \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{N_x k} u_{kj} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0} \cdot u_{0j} = \gamma_{1+}(j) \end{aligned}$$

$u_{0j}$  et  $u_{N_x j}$  s'expriment alors comme combinaison linéaire des  $u_{kj}$  des points intérieurs :

$$\begin{cases} u_{0j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \nu_{1-k} \cdot u_{kj} + \mu_{1-j} \\ u_{N_x j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \nu_{1+k} \cdot u_{kj} + \mu_{1+j} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

avec

$$\begin{cases} \nu_{1-k} = \frac{(\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x k}) \cdot (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x}) - (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0k}) \cdot (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})}{(\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00}) \cdot (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) - (\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) \cdot (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x})} \\ \nu_{1+k} = \frac{(\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x k}) \cdot (\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00}) - (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0k}) \cdot (\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0})}{(\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x}) \cdot (\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) - (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \cdot (\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00})} \\ \mu_{1-j} = \frac{(\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \cdot \gamma_{1-}(j) - (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x}) \cdot \gamma_{1+}(j)}{(\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00}) \cdot (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) - (\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) \cdot (\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x})} \\ \mu_{1+j} = \frac{(\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) \cdot \gamma_{1-}(j) - (\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00}) \cdot \gamma_{1+}(j)}{(\beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{0N_x}) \cdot (\beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) - (\alpha_{1+} + \beta_{1+} \cdot (\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \cdot (\alpha_{1-} + \beta_{1-} \cdot (\mathcal{D}_x)_{00})} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

puis, en éliminant  $u_{0j}$  et  $u_{N_x j}$  dans (4.2.1), on obtient (suivant  $\vec{e}_x$ ) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N_x} [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} u_{kj} &= [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} u_{0j} + \sum_{k=1}^{N_x-1} [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} u_{kj} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} u_{N_x j} \\
 &= \sum_{k=1}^{N_x-1} \underbrace{\left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \nu_{1-k} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \nu_{1+k} \right\}}_{[(\mathcal{D}_x)^2_{cl}]_{ik}} u_{kj} \\
 &\quad + [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{1-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{1+j} \\
 &= \sum_{k=1}^{N_x-1} [(\mathcal{D}_x)^2_{cl}]_{ik} u_{kj} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{1-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{1+j}. \tag{4.2.8}
 \end{aligned}$$

Les termes provenant des  $\nu_{1\pm k}$  apparaissent seulement si les conditions de frontière comportent une partie du type Neumann. Les coefficients  $\nu_{1\pm k}$  modifient alors la partie intérieure de l'opérateur dérivée seconde. Les termes dépendant des  $\mu_{1\pm}$ , provenant des conditions de frontière du type Dirichlet, eux, vont modifier le second membre de (4.2.1). Les conditions aux limites suivant  $\vec{e}_z$  s'éliminent par la même méthode. L'équation de Helmholtz discrète (4.2.1), portant sur les points intérieurs, devient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{N_x-1} [(\mathcal{D}_x)^2_{cl}]_{ik} u_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} [(\mathcal{D}_z)^2_{cl}]_{jl} u_{il} - a \cdot u_{ij} &= f_{ij} \tag{4.2.9} \\
 &\quad - \left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{1-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{1+j} \right\} \\
 &\quad - \left\{ [(\mathcal{D}_z)^2]_{j0} \cdot \mu_{2-i} + [(\mathcal{D}_z)^2]_{jN_z} \cdot \mu_{2+i} \right\} \\
 \forall i \in [1, N_x - 1], \quad \forall j \in [1, N_z - 1].
 \end{aligned}$$

en posant :  $f' \equiv \{\text{second membre de (4.2.9)}\}$ , celle-ci s'exprime sous forme tensorielle comme :

$$\left( \underbrace{(\mathcal{D}_x)^2_{cl} \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)^2_{cl}}_{\Delta_{cl}} - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z \right) u = f'. \tag{4.2.10}$$

Avant d'effectuer l'inversion de l'opérateur de Helmholtz pour obtenir  $u$ , celui-ci est diagonalisé. Il suffit pour cela de connaître les vecteurs propres et les valeurs propres de  $(\mathcal{D}_x)^2_{cl}$  et  $(\mathcal{D}_z)^2_{cl}$ . Soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_x & \equiv \text{matrice des vecteurs propres de l'opérateur } (\mathcal{D}_x)^2_{cl} \\ \mathcal{M}_z & \equiv \text{matrice des vecteurs propres de l'opérateur } (\mathcal{D}_z)^2_{cl} \\ \{(\lambda_x)_i\} & \equiv \text{valeurs propres de l'opérateur } (\mathcal{D}_x)^2_{cl} \quad i \in \{1, \dots, N_x - 1\} \\ \{(\lambda_z)_j\} & \equiv \text{valeurs propres de l'opérateur } (\mathcal{D}_z)^2_{cl} \quad j \in \{1, \dots, N_z - 1\} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_x^{-1} \cdot (\mathcal{D}_x)^2_{cl} \cdot \mathcal{M}_x & \equiv \Lambda_x \quad \text{matrice diagonale de l'opérateur } (\mathcal{D}_x)^2_{cl} \\ \mathcal{M}_z^{-1} \cdot (\mathcal{D}_z)^2_{cl} \cdot \mathcal{M}_z & \equiv \Lambda_z \quad \text{matrice diagonale de l'opérateur } (\mathcal{D}_z)^2_{cl} \end{array} \right.$$

La diagonalisation de l'opérateur de Helmholtz est écrite en notation tensorielle<sup>(4)</sup> :

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_z]^{-1} \cdot [(\mathcal{D}_x)_{cl}^2 \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)_{cl}^2 - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z] \cdot [\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_z] \\ = [\Lambda_x \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes \Lambda_z - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z] \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

l'inversion conduit à l'expression de  $u$  :

$$u = [\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_z] \cdot [\Lambda_x \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes \Lambda_z - a \cdot \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z]^{-1} \cdot [\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_z]^{-1} f'. \quad (4.2.12)$$

Les équations sont résolues sur les points intérieurs du domaine. Les valeurs de  $u$  sur les points de frontière s'obtiennent en utilisant les relations du type (4.2.6) successivement pour les deux directions.

## 4.2.2 Conditions mixtes non uniformes

L'équation considérée est toujours (4.1.13), mais les conditions de frontière sont mixtes non uniformes ( $\alpha$  et  $\beta$  dépendent du point de frontière considéré). Ces nouvelles conditions s'écrivent de manière similaire à ce qui a été vu dans la section précédente (équ. (4.2.3)) :

$$\begin{cases} \alpha_{1\pm}(j) \cdot u_{|_0^{N_x j}} + \beta_{1\pm}(j) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{N_x j} = \gamma_{1\pm}(j), & \text{suivant } \vec{e}_x, \\ \alpha_{2\pm}(i) \cdot u_{i|_0^{N_z}} + \beta_{2\pm}(i) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0^{N_z} = \gamma_{2\pm}(i), & \text{suivant } \vec{e}_z, \end{cases} \quad (4.2.13)$$

où  $\alpha_{1\pm}(j)$ ,  $\beta_{1\pm}(j)$ ,  $\gamma_{1\pm}(j)$  sont des fonctions de  $j$ , de même les  $\alpha_{2\pm}(i)$ ,  $\beta_{2\pm}(i)$ ,  $\gamma_{2\pm}(i)$  dépendent de  $i$ . Comme précédemment, la formulation pseudo-spectrale des opérateurs de dérivation est utilisée pour éliminer les points de frontière et obtenir des équations ne portant que sur les points intérieurs du domaine. Il en résulte des relations analogues à (4.2.6) :

$$\begin{cases} u_{0j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \nu_{1-kj} \cdot u_{kj} + \mu_{1-j}, \\ u_{N_x j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \nu_{1+kj} \cdot u_{kj} + \mu_{1+j}, \end{cases} \quad (4.2.14)$$

où les  $\nu_{1\pm kj}$  et les  $\mu_{1\pm j}$  sont définis par des relations du type (4.2.7), mais à coefficients variables. De la même manière qu'en section 4.2.1, les valeurs aux points de frontière  $u_{|_0^{N_x j}}$  et

---

4. Les valeurs propres de l'opérateur de Helmholtz  $\mathcal{H}_{vp}$  sont connues et sont :

$$\{\mathcal{H}_{vp}\} = \{\lambda_x\} \oplus \{\lambda_z\} - a.$$

$u_{i|_0}^{N_z}$  sont retirés du membre gauche de (4.2.1) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N_x} [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} u_{kj} &= [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} u_{0j} + \sum_{k=1}^{N_x-1} [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} u_{kj} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} u_{N_x j} \\
&= \sum_{k=1}^{N_x-1} \left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} + \underbrace{[(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \nu_{1-kj} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \nu_{1+kj}}_{[(\mathcal{P}_{cl}^x)]_{ik}} \right\} u_{kj} \\
&\quad + [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{+j} \\
&= \sum_{k=1}^{N_x-1} \left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)]_{ik} \right\} u_{kj} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{+j}. \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

Cette fois le terme  $\mathcal{P}_{cl}^x$  qui vient modifier  $(\mathcal{D}_x)^2$  dépend des deux directions d'espace. Étant fonction des  $\nu_{\pm kj}$ , il existe seulement si les conditions de frontière comportent une partie du type Neumann. Les termes provenant des conditions de frontière du type Dirichlet, regroupés dans les  $\mu_{\pm j}$  vont modifier le second membre de (4.2.1). Les conditions aux limites suivant  $\vec{e}_z$  s'éliminent par la même méthode. Après élimination des deux jeux de frontières, (4.2.1) sur les points intérieurs, devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_x-1} \left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{ik} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)]_{ik} \right\} u_{kj} &+ \sum_{l=1}^{N_z-1} \left\{ [(\mathcal{D}_z)^2]_{jl} + [(\mathcal{P}_{cl}^z)]_{jl} \right\} u_{il} - a \cdot u_{ij} \\
&= f_{ij} - \underbrace{\left\{ [(\mathcal{D}_x)^2]_{i0} \cdot \mu_{1-j} + [(\mathcal{D}_x)^2]_{iN_x} \cdot \mu_{1+j} \right\}}_{f_{ij}^{\mu_1}} \\
&\quad - \underbrace{\left\{ [(\mathcal{D}_z)^2]_{j0} \cdot \mu_{2-i} + [(\mathcal{D}_z)^2]_{jN_z} \cdot \mu_{2+i} \right\}}_{f_{ij}^{\mu_2}} \quad (4.2.16) \\
&\quad \forall i \in [1, N_x - 1], \quad \forall j \in [1, N_z - 1].
\end{aligned}$$

L'indexation des termes s'ajoutant à  $f$  dans le second membre de (4.2.16) indique qu'ils possèdent la même structure de vecteur que  $f$ . De même que pour des conditions de frontière uniformes il est légitime d'écrire :  $f' \equiv$  second membre de (4.2.16). Il n'est pas pour autant possible d'écrire (4.2.16) sous une forme où les opérateurs différentiels sont tensorisés. Pour mettre ceci en évidence,  $\Delta_{cl}$  est écrit sous sa forme matricielle :

$$\Delta_{cl} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_{1,1} & \mathcal{B}_{1,2} & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{1,N_z-1} \\ \mathcal{B}_{2,1} & \mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_{2,2} & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdot & \ddots & \ddots & \mathcal{B}_{N_z-2,N_z-1} \\ \mathcal{B}_{N_z-1,1} & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{N_z-1,N_z-2} & \mathcal{A}_{N_z} + \mathcal{B}_{N_z-1,N_z-1} \end{bmatrix} \quad (4.2.17)$$



avec

$$\mathcal{A}_j \equiv \begin{bmatrix} ((\mathcal{D}_x)^2)_{1,1} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)_j]_{1,1} & \cdots & \cdots & ((\mathcal{D}_x)^2)_{1,N_x-1} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)_j]_{1,N_x-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ((\mathcal{D}_x)^2)_{N_x-1,1} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)_j]_{N_x-1,1} & \cdots & \cdots & ((\mathcal{D}_x)^2)_{N_x-1,N_x-1} + [(\mathcal{P}_{cl}^x)_j]_{N_x-1,N_x-1} \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

et

$$\mathcal{B}_{jl} \equiv \begin{bmatrix} ((\mathcal{D}_z)^2)_{jl} + [(\mathcal{P}_{cl}^z)_1]_{jl} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & ((\mathcal{D}_z)^2)_{jl} + [(\mathcal{P}_{cl}^z)_{N_z-1}]_{jl} \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

ceci  $\forall j, l \in \{1, \dots, N_z - 1\}$ .

Il est intéressant de remarquer que les blocs  $\mathcal{A}$  sont pleins, tandis que les blocs  $\mathcal{B}$  sont diagonaux. La difficulté vient des  $\mathcal{P}_{cl}^x$  et  $\mathcal{P}_{cl}^z$  qui ne peuvent être écrits comme produit tensoriel d'un opérateur agissant suivant une direction et de l'identité dans l'autre direction.  $\mathcal{P}_{cl}^x$  et  $\mathcal{P}_{cl}^z$  opèrent simultanément dans les deux directions de l'espace. Il est donc impossible d'isoler leur action par rapport à l'une ou l'autre direction. C'est pour cette raison que la dépendance par rapport à la position sur la frontière des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  nécessite un traitement des équations différent de celui adopté pour des conditions mixtes uniformes. Il est à noter que si les termes d'un des deux types (Neumann ou Dirichlet) disparaissent, la même procédure que pour des coefficients uniformes s'applique. Il suffit de diviser l'équation par le coefficient  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) pour se ramener au cas uniforme, ce qui est mis en échec par la mixité.

Les termes non tensorisables de (4.2.16) sont regroupés dans le second membre de manière à faire apparaître :

$$(f^x)_{ij} = - \sum_{k=1}^{N_x-1} [(\mathcal{P}_{cl}^x)_j]_{ik} u_{kj} \quad (4.2.20)$$

$$(f^z)_{ij} = - \sum_{l=1}^{N_z-1} [(\mathcal{P}_{cl}^z)_i]_{jl} u_{il} \quad (4.2.21)$$

et donc en notation tensorielle, si  $(\mathcal{D}_{|z|_{int}})^2$  est la partie intérieure de  $(\mathcal{D}_{|x|})^2$  :

$$\begin{aligned} \left( (\mathcal{D}_x)_{int}^2 \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)_{int}^2 - a \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z \right) u &= f - f^{\mu_1} - f^{\mu_2} + f^x + f^z \\ &= f' + f^x + f^z. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Par commodité le problème considéré est momentanément restreint de telle manière que seules les conditions aux limites associées à une direction comportent des coefficients variables. Il sera supposé que (4.2.22) ne comporte plus, pour l'instant, qu'un terme en  $x$  dans son second

membre :  $f^x$ . Le système itératif suivant s'obtient en explicitant ce terme :

$$\underbrace{\left( (\mathcal{D}_x)_{int}^2 \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)_{int}^2 - a \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z \right)}_{\mathcal{H}_{int}} . u^{k+1} = f' - \mathcal{P}_{cl}^x . u^k \quad (4.2.23)$$

qui converge vers la solution<sup>(5)</sup> de (4.2.22) si  $\|(\Delta_{int})^{-1}(\mathcal{P}_{cl}^x)\| < 1$ . Afin d'améliorer la vitesse de convergence du système itératif l'opérateur  $\mathcal{H}_{int}$  est préconditionné de la manière suivante.

Soit  $\langle \alpha \rangle$  et  $\langle \beta \rangle$  les moyennes spatiales de  $\alpha$  et  $\beta$  définies comme :

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \alpha(y) dy, \\ \langle \beta \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \beta(y) dy. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire les conditions aux limites moyennes relatives à (4.2.13) :

$$\langle \alpha_{1\pm} \rangle . u|_0^{N_x j} + \langle \beta_{1\pm} \rangle . \frac{\partial u}{\partial x}|_0^{N_x j} = \gamma_{1\pm}(j), \text{ suivant } \vec{e}_x. \quad (4.2.24)$$

La procédure d'élimination revient à former l'opérateur  $\mathcal{P}_{cl}^x$ , qui est ajouté à  $(\mathcal{D}_x)_{int}^2$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_x)_{cl}^2 &= (\mathcal{D}_x)_{int}^2 + \mathcal{P}_{cl}^x \\ \mathcal{H}_{cl} &= (\mathcal{D}_x)_{cl}^2 \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{D}_z)_{int}^2 - a \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z. \end{aligned}$$

Puis on ajoute  $(\mathcal{P}_{cl}^x \otimes \mathcal{I}_z) u^k$  à gauche et à droite dans (4.2.23), qui devient :

$$\mathcal{H}_{cl} u^{k+1} = f' - \left( \mathcal{P}_{cl}^x - (\mathcal{P}_{cl}^x \otimes \mathcal{I}_z) \right) u^k. \quad (4.2.25)$$

Ceci montre que dans le cas de conditions mixtes non uniformes, l'opérateur de Helmholtz de l'équation (4.2.16) peut se décomposer en une partie tensorisable  $\mathcal{H}_\tau$  et une partie non tensorisable  $\delta\mathcal{H}$ . La partie tensorisable  $\mathcal{H}_\tau$  est l'opérateur de Helmholtz formé en éliminant les conditions aux limites uniformes de coefficients  $\langle \alpha \rangle$ ,  $\langle \beta \rangle$ , et  $\gamma$ . La partie non tensorisable s'obtient en soustrayant  $\mathcal{H}_\tau$  de  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H}_\tau = \left( (\mathcal{D}_x)_{int}^2 + \mathcal{P}_{cl}^x \right) \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes \left( (\mathcal{D}_z)_{int}^2 + \mathcal{P}_{cl}^z \right) - a \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z \quad (4.2.26)$$

$$\delta\mathcal{H} = \left( \mathcal{P}_{cl}^x - (\mathcal{P}_{cl}^x \otimes \mathcal{I}_z) \right) + \left( \mathcal{P}_{cl}^z - \mathcal{I}_x \otimes (\mathcal{P}_{cl}^z) \right) \quad (4.2.27)$$

Pour itérer, la procédure d'inversion par diagonalisation est appliquée à  $\mathcal{H}_\tau$  :

$$\mathcal{H}_\tau u^{k+1} = f' - \delta\mathcal{H} u^k. \quad (4.2.28)$$

Une fois le champ obtenu sur les points intérieurs, les valeurs aux points de frontière sont reconstruites à l'aide des  $\lambda_{\pm kj}$  et des  $\mu_{\pm j}$ .

---

5. Du fait de l'utilisation d'opérateurs spectraux cette méthode itérative converge vers la solution exacte du système discret. Donc, si on évalue la convergence numériquement, on a directement l'écart à la solution analytique. Par exemple le critère d'arrêt :  $\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^{k+1}\|} < \varepsilon$ , garantit que la solution analytique est approchée avec une précision relative de  $\varepsilon$  si on atteint le critère d'arrêt.

### 4.2.3 Conditions à dérivées mixtes uniformes

L'équation (4.1.13) est maintenant associée à des conditions de frontière mixtes en dérivées suivant une seule direction :

$$u \in \partial\Omega \begin{cases} \alpha_{1\pm} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta_{1\pm} \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{1\pm}(z), & \text{en } x = \pm 1; \\ \alpha_{2\pm} u = \gamma_{2\pm}(x), & \text{en } z = \pm 1. \end{cases} \quad (4.2.29a)$$

$$(4.2.29b)$$

avec  $\alpha_{1\pm}$ ,  $\alpha_{2\pm}$ , et  $\beta_{1\pm}$  constants.

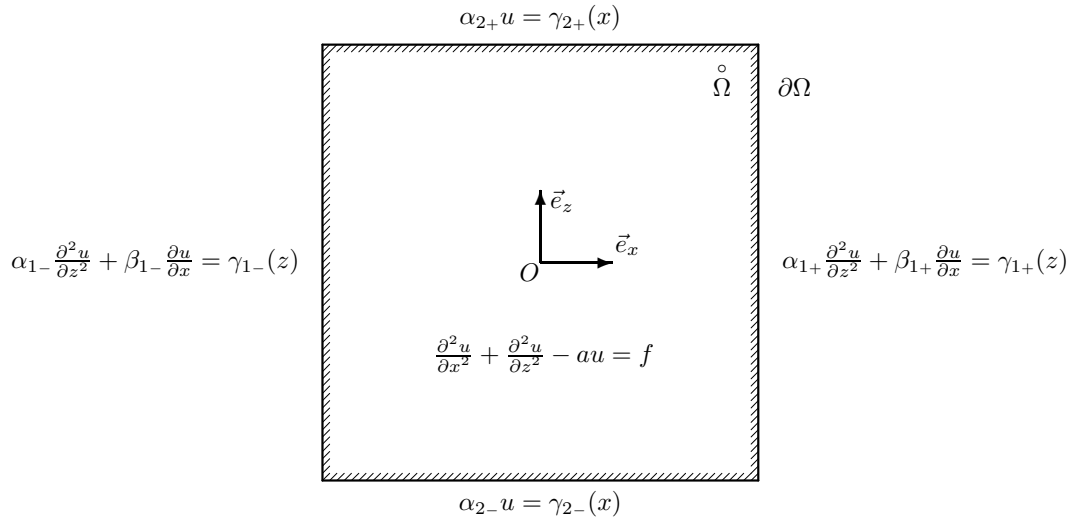


FIGURE 4.1 – Problème de Helmholtz scalaire à deux dimensions, à conditions de Dirichlet suivant  $\vec{e}_z$  et mixtes en dérivées suivant  $\vec{e}_x$ .

Dans le but d'alléger la notation, la méthode est détaillée pour des conditions de Dirichlet selon les frontières restantes. Son application à des conditions de Neumann ou Robin et à des configurations à 3 dimensions d'espace est ensuite présentée.

Pour des conditions à dérivées mixtes uniformes, une élimination des frontières selon la méthode de la section 4.2.1 ne permet pas d'employer les diagonalisations successives car chacun des points de frontière est alors couplé à chaque point intérieur du domaine (par le biais des dérivations). Dans le cas mixte uniforme [63], un point de frontière est au plus couplé aux points intérieurs alignés dans la direction normale avec le point externe (condition de Neumann). Une solution immédiate consiste à former explicitement l'opérateur de Helmholtz (comprenant  $(N_x + 1)^2 \times (N_z + 1)$  éléments), et à l'inverser. Bien que la précision spectrale soit préservée, ceci est très coûteux à la fois en temps de calcul et en espace mémoire.

Cependant s'il existe des fonctions  $\zeta_{\pm}$  vérifiant :

$$\alpha_{1\pm} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{x=\pm 1} = \zeta_{\pm}(z) u|_{x=\pm 1}, \quad (4.2.30)$$

alors les conditions mixtes en dérivée peuvent être remplacées par des conditions de Robin. L'équation (4.2.30) est un problème aux valeurs propres classique. Ce qui suggère d'écrire les équations (4.1.13) et (4.2.29a) dans la base des vecteurs propres de l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Néanmoins, il est nécessaire d'éliminer au préalable les points extérieurs de la matrice de l'opérateur dérivée seconde pour s'affranchir de difficultés liées à la présence de valeurs propres nulles.

En remplaçant le terme en dérivée seconde tangentielle,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ , par  $\zeta_{\pm}(z)$ , (4.2.29a) se transforme en une condition mixte non uniforme. La deuxième idée est d'essayer d'appliquer la procédure itérative décrite en section 4.2.2. Il sera montré dans le chapitre validation que cette approche est mise en échec.

Dans ce qui suit, un algorithme direct reposant sur la remarque précédente et sur une réorganisation des différentes opérations (élimination, diagonalisation, ...) est décrit. Cet algorithme à l'avantage de ne pas entraîner un surcoût trop important en mémoire et de nécessiter un temps de calcul du même ordre que celui d'une diagonalisation successive classique.

Les conditions (4.2.29) sont tout d'abord exprimées dans l'espace discrétisé :

$$u \in \partial\Omega \begin{cases} \alpha_{1\pm} \sum_{l=0}^{N_z} (\mathcal{D}_z^2)_{jl} u_{|_0^{N_x} l} + \beta_{1\pm} \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x)_{|_0^{N_x} k} u_{kj} = \gamma_{1\pm}(j), \quad \forall j \in \{0, \dots, N_z\}, \\ \alpha_{2\pm} u_{i|_0^{N_z}} = \gamma_{2\pm}(i), \quad \forall i \in \{0, \dots, N_x\}. \end{cases} \quad (4.2.31)$$

$$\alpha_{2\pm} u_{i|_0^{N_z}} = \gamma_{2\pm}(i), \quad \forall i \in \{0, \dots, N_x\}. \quad (4.2.32)$$

L'algorithme peut maintenant être appliqué.

#### 4.2.3.1 La procédure

##### Étape 1: élimination des conditions de Dirichlet

Les conditions de Dirichlet, ici relatives aux frontières horizontales, sont éliminées. L'équation de Helmholtz discrète (4.2.1) devient :

$$\sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x^2)_{ik} u_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{D}_z^2)_{jl} u_{il} - a u_{ij} = f'_{ij} \quad (4.2.33)$$

avec  $f'_{ij} = f_{ij} - \{(\mathcal{D}_z^2)_{j0} u_{i0} + (\mathcal{D}_z^2)_{jN_z} u_{iN_z}\},$

et  $u_{i|_0^{N_z}} = \frac{\gamma_{2\pm}(i)}{\alpha_{2\pm}}.$

Les points extrêmes des frontières restantes sont eux aussi éliminés dans les conditions limites :

$$\alpha_{1\pm} \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{D}_z^2)_{jl} u_{|_0^{N_x} l} + \beta_{1\pm} \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x)_{|_0^{N_x} k} u_{kj} = \gamma_{1\pm}(j) - \{(\mathcal{D}_z^2)_{j0} u_{|_0^{N_x} 0} + (\mathcal{D}_z^2)_{jN_z} u_{|_0^{N_x} N_z}\}, \quad (4.2.34)$$

$j \in \{1, \dots, N_z - 1\},$

Étape 2: changement de base

$(\mathcal{D}_z^2)_{int}$  est défini comme la partie intérieure de  $(\mathcal{D}_z^2)$  :  $[(\mathcal{D}_z^2)_{int}]_{jk} = (\mathcal{D}_z^2)_{jl}$  pour  $j, l \in \{1, \dots, N_z - 1\}$ . L'équation de Helmholtz réduite (4.2.33) et les conditions associées (4.2.34) sont à présent reformulées dans la base des vecteurs propres de  $(\mathcal{D}_z^2)_{int}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z^{-1}(\mathcal{D}_z^2)_{int}\mathcal{M}_z &= \Lambda_z^2 \\ (\Lambda_z^2)_{jl} &= \delta_{jl}(\lambda_z)_j \quad j \in \{1, \dots, N_z - 1\} \end{aligned}$$

Pour  $i \in \{0, \dots, N_x\}$  et  $j \in \{1, \dots, N_z - 1\}$  la notation suivante relative au changement de base est introduite :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij} &= \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{M}_z^{-1})_{jl} u_{il}, & \tilde{f}'_{ij} &= \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{M}_z^{-1})_{jl} f'_{il}, \\ \tilde{\alpha}_{1\pm}(j) &= \alpha_{1\pm}(\lambda_z)_j, & \tilde{\beta}_{1\pm} &= \beta_{1\pm}, \\ \tilde{\gamma}'_{1\pm}(j) &= \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{M}_z^{-1})_{jl} [\gamma_{1\pm}(l) - \{(\mathcal{D}_z^2)_{l0} u_{|_0^{N_x} 0} + (\mathcal{D}_z^2)_{lN_z} u_{|_0^{N_x} N_z}\}], \end{aligned}$$

Dans la nouvelle base, le problème de Helmholtz discrétisé devient, pour  $i \in \{0, \dots, N_x\}$  et  $j \in \{1, \dots, N_z - 1\}$  :

$$\sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x^2)_{ik} \tilde{u}_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} (\Lambda_z^2)_{jl} \tilde{u}_{il} - a \tilde{u}_{ij} = \tilde{f}'_{ij}, \quad (4.2.35)$$

avec les conditions mixtes non uniformes suivantes :

$$\tilde{\alpha}_{1\pm}(j) \tilde{u}_{|_0^{N_x} j} + \tilde{\beta}_{1\pm} \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_x)_{|_0^{N_x} k} \tilde{u}_{kj} = \tilde{\gamma}'_{1\pm}(j). \quad (4.2.36)$$

Étape 3: élimination des conditions mixtes non uniformes

Les points de frontière  $\tilde{u}_{0j}$  et  $\tilde{u}_{N_x j}$ , sont exprimés en fonction des points intérieurs par le même type de combinaisons linéaires que dans les sections 4.2.1 et 4.2.2 :

$$(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) \tilde{u}_{0j} + \tilde{\beta}_{1-} \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{0k} \tilde{u}_{kj} + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x} \tilde{u}_{N_x j} = \tilde{\gamma}'_{1-}(j) \quad (4.2.37)$$

$$(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \tilde{u}_{N_x j} + \tilde{\beta}_{1+} \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{N_x k} \tilde{u}_{kj} + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0} \tilde{u}_{0j} = \tilde{\gamma}'_{1+}(j) \quad (4.2.38)$$

La résolution du système linéaire  $\begin{cases} (4.2.37) \\ (4.2.38) \end{cases}$  conduit aux relations :

$$\tilde{u}_{0j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \tilde{\nu}_{jk}^- \tilde{u}_{kj} + \tilde{\mu}_j^-, \quad (4.2.39a)$$

$$\tilde{u}_{N_x j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \tilde{\nu}_{jk}^+ \tilde{u}_{kj} + \tilde{\mu}_j^+, \quad (4.2.39b)$$

les coefficients,  $\tilde{\nu}_{jk}^-$ ,  $\tilde{\nu}_{jk}^+$  et  $\tilde{\mu}_j^-$ ,  $\tilde{\mu}_j^+$ , sont donnés dans l'annexe A.1. Remplacer (4.2.39) dans l'équation (4.2.35) fait apparaître l'équation de Helmholtz réduite aux points intérieurs,  $i \in \{1, \dots, N_x - 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, N_z - 1\}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_x-1} \{ (\mathcal{D}_x^2)_{ik} + (\mathcal{D}_x^2)_{i0} \tilde{\nu}_{jk}^- + (\mathcal{D}_x^2)_{iN_x} \tilde{\nu}_{jk}^+ \} \tilde{u}_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} (\Lambda_z^2)_{jl} \tilde{u}_{il} \\ - a \tilde{u}_{ij} = \tilde{f}_{ij} - (\mathcal{D}_x^2)_{i0} \tilde{\mu}_j^- - (\mathcal{D}_x^2)_{iN_x} \tilde{\mu}_j^+ . \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

L'équation (4.2.40) peut être vue comme un système de  $(N_z - 1)$  équations de Helmholtz à une dimension, dans la direction normale aux frontières mixtes en dérivées (horizontales). La constante de Helmholtz devient alors :  $a'_j = a - (\lambda_z)_j$ , qui diffère pour chaque équation du système.

#### Étape 4: diagonalisation

Pour diagonaliser l'opérateur de Helmholtz  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans (4.2.40), celui-ci est exprimé comme une somme de deux opérateurs :  $\tilde{\mathcal{H}}_\tau$ , sa partie tensorisable, et  $\tilde{\mathcal{H}}_{cl}$ , qui est formé par l'élimination des conditions mixtes en dérivées et n'est pas tensorisable.  $\tilde{\mathcal{H}}_\tau$  s'écrit en notation tensorielle :

$$\tilde{\mathcal{H}}_\tau = (\mathcal{D}_x^2)_{int} \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes (\Lambda_z^2) - a \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_z. \quad (4.2.41)$$

$\tilde{\mathcal{H}}_{cl}$  se calcule par :

$$(\tilde{\mathcal{H}}_{cl})_{ik}(j) = (\mathcal{D}_x^2)_{i0} \tilde{\nu}_{jk}^- + (\mathcal{D}_x^2)_{iN_x} \tilde{\nu}_{jk}^+. \quad (4.2.42)$$

La dépendance en  $j$  de  $\tilde{\mathcal{H}}_{cl}$  se traduit par la perte de la tensorisation de l'opérateur de Helmholtz. Cependant,  $\tilde{\mathcal{H}}_\tau$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_{cl}$  sont tous les deux diagonaux par blocs. Par conséquent  $\tilde{\mathcal{H}}$  est aussi diagonal par bloc comme somme de deux matrices diagonales par blocs. Chaque bloc peut alors être diagonalisé indépendamment.

#### Étape 5: calcul de $u$

$\tilde{\mathcal{H}}(j)$  étant le  $j^{\text{ème}}$  bloc de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , la matrice de ses vecteurs propres,  $\tilde{\mathcal{M}}_x(j)$ , est telle que :

$$\tilde{\mathcal{M}}_x(j)^{-1} \tilde{\mathcal{H}}(j) \tilde{\mathcal{M}}_x(j) = \tilde{\Lambda}_x(j) \quad (4.2.43)$$

avec  $(\tilde{\Lambda}_x)_{ik}(j) = \delta_{ik}\tilde{\lambda}_{kj}$ . Le changement de base est appliqué à  $\tilde{u}$  et  $\tilde{f}$  de la manière suivante :

$$\tilde{u}_{ij} = \sum_{k=1}^{N_x-1} (\tilde{\mathcal{M}}_x(j)^{-1})_{ik} \tilde{u}_{kj} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{ij} = \sum_{k=1}^{N_x-1} (\tilde{\mathcal{M}}_x(j)^{-1})_{ik} \tilde{f}_{kj}.$$

La solution est alors donnée par la relation suivante :  $\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{f}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} - a}$ .

D'une part, l'ordre des étapes est primordial, d'autre part la diagonalisation indépendante de chaque bloc, effectuée à l'étape 4, est uniquement possible parce que les opérateurs dérivées seconde de l'équation de Helmholtz et des conditions mixtes en dérivées sont identiques.

Le surcoût en mémoire provient du changement de base final qui requiert le stockage de  $(N_z - 1)^2$  éléments pour les matrices  $\mathcal{M}_z$  et  $\mathcal{M}_z^{-1}$  et de  $(N_x - 1)^2$  éléments pour chaque matrice  $\tilde{\mathcal{M}}_x(j)$  et  $\tilde{\mathcal{M}}_x^{-1}(j)$ , soit  $2 \times (N_x - 1)^2 \times (N_z - 1) + 2 \times (N_z - 1)^2$  éléments au lieu de  $2 \times (N_x - 1)^2 + 2 \times (N_z - 1)^2$  éléments pour 4 matrices. Néanmoins le nombre d'opérations exécutées pour diagonaliser l'opérateur sera le même que pour les diagonalisations successives à une permutation d'indices près. Comparée à l'inversion de l'opérateur de Helmholtz explicitement formé, cette procédure est largement plus économe en mémoire et en temps de calcul comme ceci sera montré dans la validation du code. En référence à l'étape 4, cette méthode sera à présent désignée comme la diagonalisation par blocs.

#### 4.2.3.2 Conditions de Neumann et Robin

Si les conditions en  $z = \pm 1$  sont  $\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma(x)$ , les valeurs de  $u$  sur la frontière sont exprimées comme combinaisons linéaires des valeurs aux points intérieurs :

$$u_{i0} = \sum_{l=1}^{N_z-1} \tilde{\nu}_l^- u_{il} + \gamma_i^- \quad (4.2.44a)$$

$$u_{iN_z} = \sum_{l=1}^{N_z-1} \tilde{\nu}_l^+ u_{il} + \gamma_i^+ \quad (4.2.44b)$$

et insérées dans (4.2.33) et (4.2.34) (les coefficients  $\tilde{\nu}_l^-, \tilde{\nu}_l^+, \gamma_i^-, \gamma_i^+$  sont obtenus comme en section 4.2.1). L'extension aux conditions de Robin est immédiate.

#### 4.2.3.3 Configurations à 3 dimensions d'espace

La procédure peut être adaptée sans difficulté à des configurations 3D cartésiennes incluant des conditions mixtes en dérivées sur un seul jeu de frontières parallèles. Le traitement de configurations 3D cylindriques associées à des conditions mixtes sur la frontière latérale du cylindre et des conditions uniformes (Dirichlet, Neumann ou Robin) à ses extrémités, est décrit en annexe A.2. Dans cette géométrie, des points de Gauss-Radau sont utilisés pour ne pas imposer de condition sur l'axe [23].

La procédure 3D peut être résumée suivant :

Étape 1: réduction du système discret en éliminant successivement toutes les conditions aux limites classiques,

Étape 2: changements de base successif pour diagonaliser tous les opérateurs de dérivées seconde suivant des directions normales aux frontières mixtes en dérivées,

Étape 3: réduction du système pour les conditions à dérivées mixtes,

Étape 4: diagonalisation de l'opérateur de Helmholtz réduit

$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_\tau + \tilde{\mathcal{H}}_{cl}$  où

$$\tilde{\mathcal{H}}_\tau = ((\mathcal{D}_x^2))_{int} \otimes \mathcal{I}_y \otimes \mathcal{I}_z + \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_y \otimes (\Lambda_z^2) + \mathcal{I}_x \otimes (\Lambda_y^2) \otimes \mathcal{I}_z - a\mathcal{I}_x \otimes \mathcal{I}_y \otimes \mathcal{I}_z. \quad (4.2.45)$$

et

$$(\tilde{\mathcal{H}}_{cl})_{ik}(jl) = (\mathcal{D}_x^2)_{i0} \tilde{\nu}_{jkl}^- + (\mathcal{D}_x^2)_{iN_x} \tilde{\nu}_{jkl}^+. \quad (4.2.46)$$

Étape 5: calcul de  $u$ .

Le coût de stockage est égal à celui de la procédure 2D multiplié par le nombre de points dans la 3<sup>ème</sup> direction. Le temps de calcul reste quasiment égal à celui des diagonalisations successives.





# VALIDATION DES ALGORITHMES

Le comportement des méthodes itératives et directes présentées au chapitre précédent (sections 4.2.2 et 4.2.3) est maintenant étudié en fonction du nombre de points du maillage et de la valeur de la constante de Helmholtz. Les algorithmes sont appliqués à des problèmes tests choisis de manière à faciliter l'analyse des résultats tout en restant suffisamment génériques.

## 5.1 Formulation des problèmes tests

### 5.1.1 Conditions mixtes non uniformes

$$\alpha_{2+}u + \beta_{2+}\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{2+}(x)$$

$$\alpha_{2-}u + \beta_{2-}\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{2-}(x)$$

$$\alpha_{1-}(z)u + \beta_{1-}(z)\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{1-}(z)$$

$$\alpha_{1+}(z)u + \beta_{1+}(z)\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{1+}(z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - au = f$$

FIGURE 5.1 – Problème de Helmholtz 2D à conditions mixtes non uniformes portant sur les parois verticales.

La résolution d'une équation de Helmholtz sur une fonction vectorielle étant similaire au traitement d'autant d'équations scalaires que la fonction comporte de composantes, le problème test est restreint à la recherche d'une fonction scalaire  $u$  de  $x$  et  $z$ , définie sur le domaine  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , solution de l'équation :

$$\Delta u - au = f, \quad (5.1.1)$$

associée aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} \alpha_{1\pm}(j)u + \beta_{1\pm}(j)\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{1\pm}(j) \\ \alpha_{2\pm}u + \beta_{2\pm}\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{2\pm}(i) \end{cases} \quad (5.1.2)$$

La figure 5.1, représente le lieu d'application de ces différentes relations sur le domaine de calcul. Le second membre et les coefficients des conditions aux limites sont choisis tels que la solution analytique de (5.1.1-5.1.2) soit :

$$\begin{aligned} u_a &= \sin(\pi x) \sin(\pi z) + \cos(\pi x) \cos(\pi z) + C \\ &= \cos(\pi(x - z)) + C, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

c'est-à-dire comme :

$$\begin{cases} f(x, z) = -(2\pi^2 + a) \cos(\pi(x - z)) - aC \\ \alpha_{1\pm}(z) = 1 - z^2 \\ \beta_{1\pm}(z) = \mp 1 \\ \gamma_{1\pm}(z) = (1 - z^2)(-\cos(\pi z) + C) \pm \pi \sin(\pi z) \\ \alpha_{2\pm} = 1 \\ \beta_{2\pm} = \mp \frac{1}{2} \\ \gamma_{2\pm}(x) = -\cos(\pi x) \pm \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) + C \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Ce type de solution (5.1.3) est basé sur celle introduite par Haidvogel et Zang [62] dans le cas d'une équation de Poisson, et adaptée par Haldenwang *et al.* [63] et Dang-Vu et Delcarte [36] au traitement des problèmes de Helmholtz. Les valeurs de  $u_a$  sont augmentées d'une constante  $C$  suffisamment grande pour que  $u_a$  ne s'annule jamais, ce qui permet de vérifier directement la précision relative de la solution calculée  $u_c$  sans passer par le résidu. L'erreur  $\varepsilon$  est donnée par :

$$\varepsilon = \left\| \frac{u_c - u_a}{u_a} \right\|_{\infty}, \quad (5.1.5)$$

où la norme infinie discrète  $\|\cdot\|_\infty$  est définie par :

$$\|u\|_\infty \equiv \max_{i,j} |u_{ij}|. \quad (5.1.6)$$

Les coefficients moyens utilisés pour le préconditionnement sont :  $\langle \alpha_{1\pm} \rangle = \frac{2}{3}$  et  $\langle \beta_{1\pm} \rangle = \mp 1$ .

### 5.1.2 Conditions mixtes en dérivées

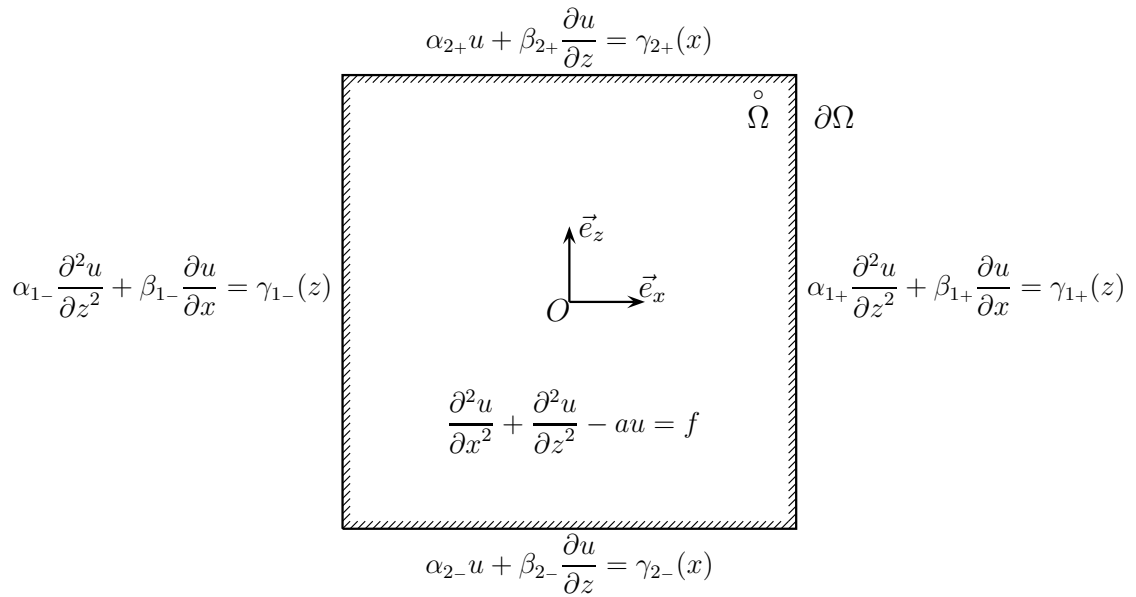


FIGURE 5.2 – Problème de Helmholtz 2D, les conditions mixtes en dérivées portant sur les parois verticales.

L'inconnue reste la fonction  $u$  de  $x$  et  $z$ , définie sur le domaine  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , solution de l'équation :

$$\Delta u - au = f.$$

Les conditions aux limites sont à présent mixtes en dérivées et à coefficients uniformes :

$$\begin{cases} \alpha_{1\pm} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta_{1\pm} \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{1\pm}(j), \\ \alpha_{2\pm} u + \beta_{2\pm} \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{2\pm}(i). \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Le cas-test est représenté par la figure 5.2. Le second membre  $f$  et les coefficients des conditions aux limites sont choisis tels que la solution analytique soit la même que celle du cas mixte non uniforme :

$$u_a = \cos(\pi(x - z)) + C,$$

c'est-à-dire comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, z) = -(2\pi^2 + a) \cos(\pi(x - z)) - aC \\ \alpha_{1\pm}(z) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} \quad (\text{cas diffusif ou antidiffusif}) \\ \beta_{1\pm}(z) = \pm 1 \\ \gamma_{1\pm}(z) = -\frac{\pi^2}{2} \cos(\pi z) \mp \pi \sin(\pi z) \text{ ou } \frac{\pi^2}{2} \cos(\pi z) \mp \pi \sin(\pi z) \\ \alpha_{2\pm} = 1 \\ \beta_{2\pm} = 0 \\ \gamma_{2+} = -\cos(\pi x) + C \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

Pour ce type de conditions aux limites, il est utile de distinguer le cas où  $\alpha_{1\pm} < 0$  de celui où  $\alpha_{1\pm} > 0$ . Le premier est relatif à la diffusion propre de la frontière considérée, le second est lui relatif à l'anti-diffusion de la frontière : les gradients de  $u$  sont alors amplifiés. Dans la suite, les modèles physiques utilisés ne feront intervenir que la diffusivité de l'interface, néanmoins les méthodes seront testées pour ces deux types de phénomènes.

## 5.2 Méthode itérative

La méthode itérative décrite en section 4.2.2 est validée sur le problème test décrit en 5.1.1. Elle est ensuite utilisée pour résoudre le problème aux conditions mixtes en dérivées décrit en section 5.1.2. Les modifications introduites à cet effet dans l'algorithme sont décrites en 5.2.2.

### 5.2.1 Conditions mixtes non uniformes

La méthode itérative est appliquée sur le problème test de la section 5.1.1. Le calcul de la solution numérique est arrêté lorsque le critère de convergence est vérifié à  $10^{-14}$  près :  $\delta u_c = \left\| \frac{u_c^{k+1} - u_c^k}{u_c^k} \right\|_{\infty} < 10^{-14}$ , ce qui correspond au zéro machine pour des nombres réels en double précision codés sur 8 octets.

La figure 5.3 montre l'évolution de l'écart relatif  $\varepsilon$  de la solution numérique  $u_c$  à la solution analytique  $u$  lorsque le nombre de points du maillage varie entre  $5 \times 5$  et  $250 \times 250$ . Les résultats sont obtenus pour plusieurs valeurs de la constante de Helmholtz :  $a = 0$  (cas d'une équation de poisson),  $a = 10^3$ ,  $a = 10^6$ . En première lecture, deux caractéristiques communes à tous les coefficients de Helmholtz représentés peuvent être mises en évidence. La première est l'existence d'une zone de décroissance exponentielle avec le maillage sur l'intervalle allant de  $5 \times 5$  à  $20 \times 20$  qui se traduit par la décroissance linéaire de la courbe (l'échelle verticale étant logarithmique). L'erreur décroît rapidement pour atteindre la précision machine. La seconde caractéristique est la croissance des erreurs de troncature qui constitue le bruit numérique. Cette augmentation

progressive de l'erreur dégrade la solution de manière sensible dès que le maillage employé fait intervenir des échelles de longueur associés à des modes pour lesquelles la solution possède une composante inférieure à la précision machine. Pour la fonction  $u$  considérée (c.f. 5.1.3), le bruit devient visible à partir de  $25 \times 25$ .

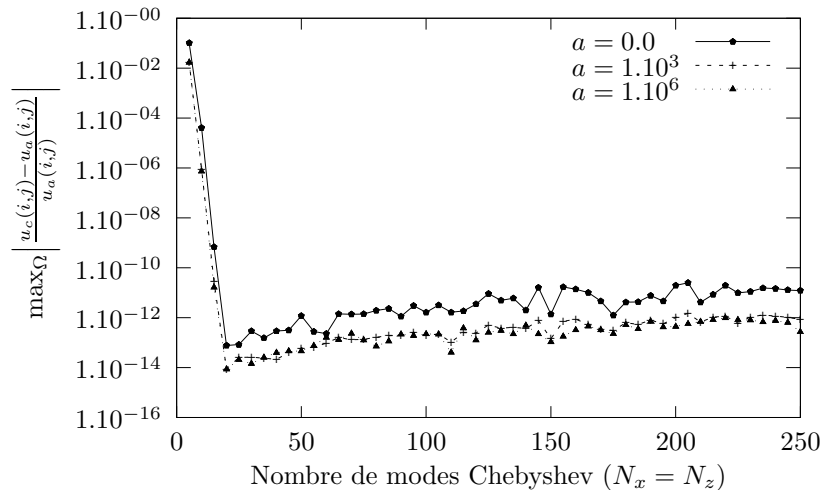


FIGURE 5.3 – Méthode itérative appliquée à un problème de Helmholtz 2D mixte non uniforme.

Enfin, il est intéressant de constater que la constante de Helmholtz n'intervient pas dans la discussion précédente. La courbe correspondant à  $a = 0$  est en moyenne au dessus de celle correspondant à  $a = 10^3$ , elle-même au dessus de  $a = 10^6$ . Ce qui signifie que la constante de Helmholtz  $a$  améliore légèrement la qualité de l'approximation obtenue une fois le critère de convergence vérifié.

maillage	Cste. de Helmholtz $a$		
	0	$10^3$	$10^6$
$5 \times 5$	18	6	4
$20 \times 20$	16	8	5
$50 \times 50$	16	9	6
$100 \times 100$	16	9	6
$150 \times 150$	15	9	6
$200 \times 200$	14	9	6
$250 \times 250$	16	9	6

TABLE 5.1 – Nombre d'itérations nécessaires pour vérifier le critère de convergence  $\delta u_c < 10^{-14}$ .

Le tableau ci-dessus met en évidence l'influence de la constante de Helmholtz sur la vitesse de convergence de la méthode. Quel que soit le maillage, la méthode converge d'autant plus rapidement vers la solution que la constante de Helmholtz est grande. Un retour sur l'équation de Helmholtz (4.1.13) permet de comprendre ce comportement. La constante de Helmholtz

participe directement à la partie diagonale de l'opérateur de Helmholtz, or un résultat connu de l'analyse numérique est qu'un grand nombre de méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, etc...), convergent si la matrice d'itération est à diagonale dominante. Plus l'ordre de grandeur de la constante de Helmholtz est élevé et plus la matrice de l'opérateur est proche d'une matrice diagonale. Le problème devient alors d'autant plus simple à résoudre, d'où le gain en nombre d'itérations.

### 5.2.2 Conditions mixtes en dérivées, uniformes

L'idée de substituer une condition mixte non uniforme par une condition mixte en dérivée, exposée en section 4.2.3, conduit à utiliser la même méthode itérative pour résoudre les deux problèmes de Helmholtz associés. La procédure qui en découle consiste alors à construire le problème de Helmholtz correspondant dans la base des vecteurs propres de  $(\mathcal{D}_z^2)$  (après élimination des conditions mixtes uniformes), c'est-à-dire à expliciter  $\tilde{\mathcal{H}}$  et à formuler les conditions mixtes non uniformes résultant du changement de base. Dès lors, l'élimination des conditions mixtes non uniformes fait apparaître l'opérateur de Helmholtz sur les points intérieurs,  $\tilde{\mathcal{H}}_{cl}$ , modifié pour prendre en compte les conditions de frontière. Cet opérateur est alors séparé en une partie tensorisable :  $\tilde{\mathcal{H}}_\tau$ , et une partie non-tensorisable :  $\delta\tilde{\mathcal{H}}$ , ce qui permet d'appliquer la procédure itérative décrite en section

#### 5.2.2.1 Cas $\alpha_{1\pm} < 0$ : diffusion

Lorsque  $\alpha_{1\pm} < 0$ , la condition de frontière traduit une relation d'équilibre du flux net (de la variable) entre le fluide et la frontière avec la diffusion par la frontière :

$$\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \underbrace{(-\alpha)}_{>0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \gamma(\tau). \quad (5.2.1)$$

La figure 5.4 représente les valeurs de  $\varepsilon$  obtenues pour différents maillages de  $5 \times 5$  à  $250 \times 250$  lorsque la constante de Helmholtz est égale à 0,  $10^3$  et  $10^6$ . Afin de minimiser le coût en temps de calcul, le critère de convergence est relaxé à  $\delta u_c < 10^{-13}$ . Les résultats mettent en évidence le comportement de la méthode itérative lorsqu'elle est appliquée à la résolution numérique du problème de Helmholtz à conditions mixtes en dérivées et uniforme. Quelque soit la valeur de  $a$ , la méthode fournit une solution approchée au minimum à  $10^{-12}$ . Le caractère spectral de la méthode de résolution est conservé :  $\varepsilon$  décroît exponentiellement sur un intervalle de maillages de  $5 \times 5$  à  $20 \times 20$ . Pour les maillages supérieurs à  $25 \times 25$ , la saturation des erreurs d'arrondis conduit à une augmentation progressive de l'écart relatif à la solution analytique  $\varepsilon$ . Le comportement de la méthode est identique pour le problème mixte en dérivée diffusif et le problème mixte non uniforme. L'influence de la constante de Helmholtz sur l'amplitude de l'écart  $\varepsilon$  est à peine plus marquée ici.

Le nombre d'itérations nécessaires pour vérifier le critère de convergence (tab. 5.2) fait apparaître la différence d'efficacité de la méthode itérative en fonction du problème résolu.

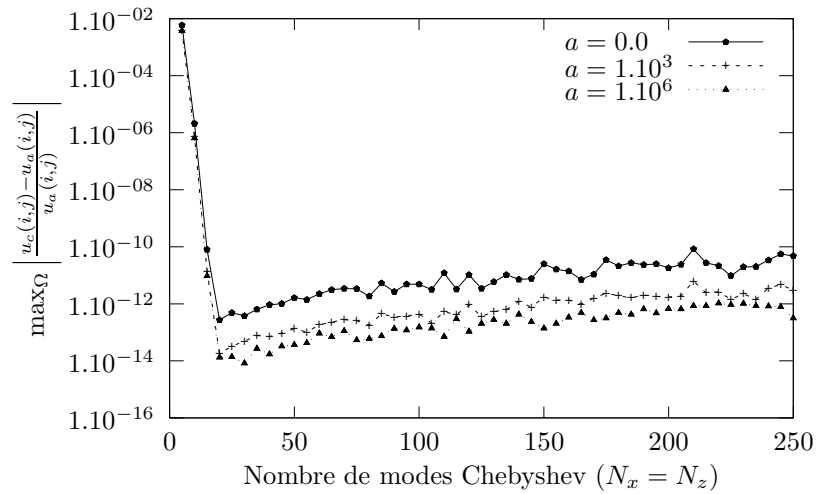


FIGURE 5.4 – Méthode itérative appliquée à un problème de Helmholtz 2D mixte en dérivées.

Celle-ci est ici beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que dans le cas des conditions mixtes non uniformes. En effet, si dans le cas précédent le nombre d'itérations ne dépassait pas une vingtaine, il varie ici entre 100 et 200000 pour  $a = 0$ , 10 et 20000 pour  $a = 10^3$ , 5 et 650 pour  $a = 10^6$ . La méthode devient vite très lourde à mettre en œuvre lorsqu'on diminue le pas d'espace. Le coût en terme d'itérations peut être contrôlé par le pas de temps ( $a \propto \delta t^{-1}$ ), mais le fait de diminuer le pas de temps induit à une augmentation du nombre de pas de temps nécessaire pour conserver l'intervalle de temps sur lequel la dynamique d'un écoulement est calculée. Globalement le coût en temps de calcul est important pour les problèmes de Helmholtz à conditions mixtes en dérivées, ceci dans le seul cas diffusif.

maillage	Cste. de Helmholtz $a$		
	0.0	$10^3$	$10^6$
$5 \times 5$	94	10	5
$20 \times 20$	1477	116	8
$50 \times 50$	8763	761	21
$100 \times 100$	33529	2983	94
$150 \times 150$	73200	6584	227
$200 \times 200$	126306	11434	409
$250 \times 250$	196200	17844	641

TABLE 5.2 – Nombre d'itérations nécessaires pour vérifier le critère de convergence  $\delta u_c < 10^{-13}$ .



### 5.2.2.2 Cas $\alpha_{1\pm} > 0$ : anti-diffusion

Lorsque  $\alpha_{1\pm} > 0$ , le bilan imposé à la frontière traduit le caractère anti-diffusif de la paroi vis-à-vis de la variable  $u$  :

$$\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \underbrace{(-\alpha)}_{<0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \gamma(\tau). \quad (5.2.2)$$

Bien que ce type de phénomène soit contraire à l'intuition physique, la méthode est étudiée dans ce cas afin de connaître son comportement pour toute la classe de conditions aux limites faisant intervenir des dérivées secondes tangentielles et des dérivées premières normales.

L'application de la même procédure d'élimination des conditions de frontière aboutit à la formulation d'un système itératif dont la solution approchée diverge à chaque itération. Pour comprendre pourquoi, il est nécessaire d'effectuer un examen plus détaillé de l'algorithme. L'expression du système itératif est analogue au cas mixte non uniforme (4.2.28), et s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{H}}_\tau u^{k+1} = f' - \delta \tilde{\mathcal{H}} u^k. \quad (5.2.3)$$

La convergence d'un système itératif est directement liée au rayon spectral de l'opérateur d'itération, qui dans le cas de (5.2.3) est  $\mathcal{M}_{it} = \tilde{\mathcal{H}}_\tau^{-1} \delta \tilde{\mathcal{H}}$ . La méthode converge si  $\rho(\mathcal{M}_{it}) < 1$ .

Les valeurs du rayon spectral en fonction du maillage sont résumées par la figure 5.5. Pour  $a = 0.0$ ,  $\rho(\mathcal{M}_{it})$  est supérieur à 1 quelque soit le maillage, et prend même une valeur d'environ 60000 aux plus grands maillages explorés : la méthode ne converge pas. Pour  $a = 10^3$ , une zone restreinte aux très faibles nombres de points de  $5 \times 5$  à  $10 \times 25$  n'est pas recouverte par la surface, l'amplitude du rayon spectral étant représenté sur une échelle logarithmique, cela signifie que  $\rho(\mathcal{M}_{it})$  est plus petit que 1 dans cette zone et plus grand ailleurs. La méthode est divergente pour presque tous les maillages. Pour  $a = 10^6$ , la zone pour laquelle  $\rho(\mathcal{M}_{it})$  est inférieur à 1 est plus étendue, toutefois, lorsque le maillage est suffisamment raffiné dans les deux directions la méthode diverge. Ceci montre que le traitement itératif d'une condition mixte en dérivées n'est pas envisageable. Il est très difficile de bien résoudre les structures spatiales fines (qui nécessitent de raffiner le maillage) car le rayon spectral devient vite supérieur à 1, à pas de temps fixé. Il devient alors nécessaire d'utiliser un pas de temps exagérément petit pour permettre à l'algorithme de converger, ce qui allonge de manière déraisonnable le temps de calcul nécessaire à la résolution numérique d'un phénomène donné.

Le même type d'analyse peut être conduite sur les conditions du type diffusif. L'observation de la figure 5.6, montre que le cas diffusif est beaucoup plus favorable à la méthode itérative. Cette fois-ci  $\rho(\mathcal{M}_{it})$  est inférieur à 1 pour toutes les valeurs de la constante de Helmholtz  $a$ , et pour tous les maillages explorés. Toutefois, plus le nombre de modes de Chebyshev augmente, plus le rayon spectral se rapproche de 1 par valeurs inférieures.  $\rho(\mathcal{M}_{it})$  se rapproche d'autant plus vite de 1 que la constante de Helmholtz est petite. Pour  $a = 10^6$ , le rayon spectral est encore aux alentours de 0,7 pour les maillages les plus raffinés explorés, soit ici  $100 \times 100$ , alors qu'il est environ égal à 0,999 pour  $a = 0$  et égal à 0,990 pour  $a = 10^3$ . Le rayon spectral fournit une majoration du taux de décroissance de l'écart à la solution analytique par la relation :

$$\|\varepsilon^k\|_\infty \leq \text{Cond} \rho(\mathcal{M}_{it})^k \|\varepsilon^0\|_\infty, \quad (5.2.4)$$

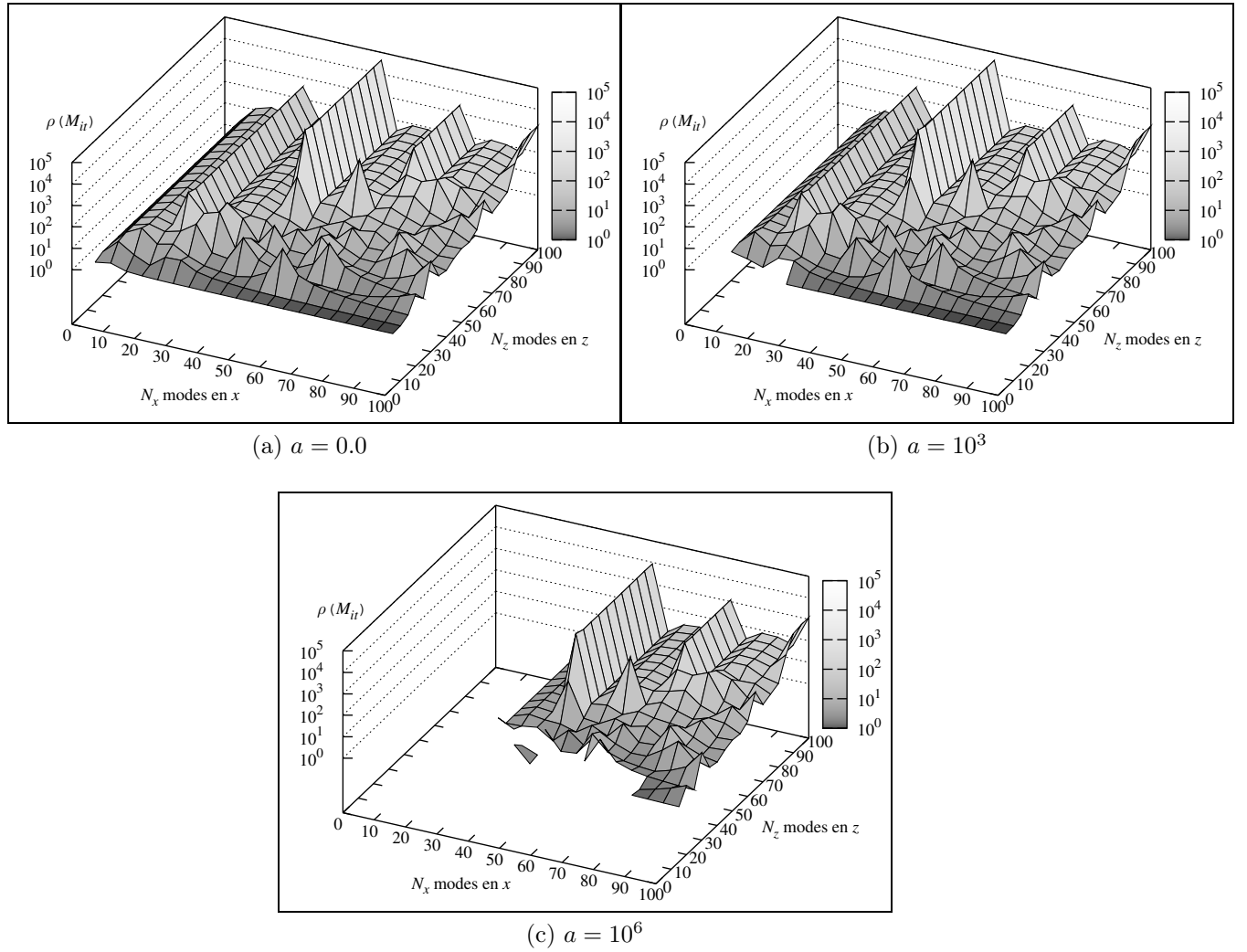


FIGURE 5.5 – Rayon spectral, cas anti-diffusif.

où  $Cond$  est le nombre de conditionnement de la matrice des vecteurs propres de  $\mathcal{M}_{it}$  (c.f. [40]). Quand le nombre d'itérations  $k$  est suffisamment grand, l'expression (5.2.4) implique que

$$\|\varepsilon^k\|_\infty \sim Cste \rho(\mathcal{M}_{it})^k, \quad (5.2.5)$$

d'où l'on tire que  $\ln(\|\varepsilon^k\|_\infty)$  tend vers une droite de pente de  $-\ln(\rho)$ , qui est la vitesse asymptotique de décroissance [40]. Ceci est en accord avec les résultats du tableau 5.2 et les valeurs du rayon spectral représentées en figure 5.6. Il ressort que, plus  $\rho$  est proche de 1, plus la vitesse asymptotique de convergence est proche de 0, ce qui explique que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence devienne très important.

L'analyse des variations du rayon spectral de l'opérateur d'itération avec le maillage explique à la fois la divergence de la méthode pour le cas anti-diffusif et la mauvaise vitesse de convergence

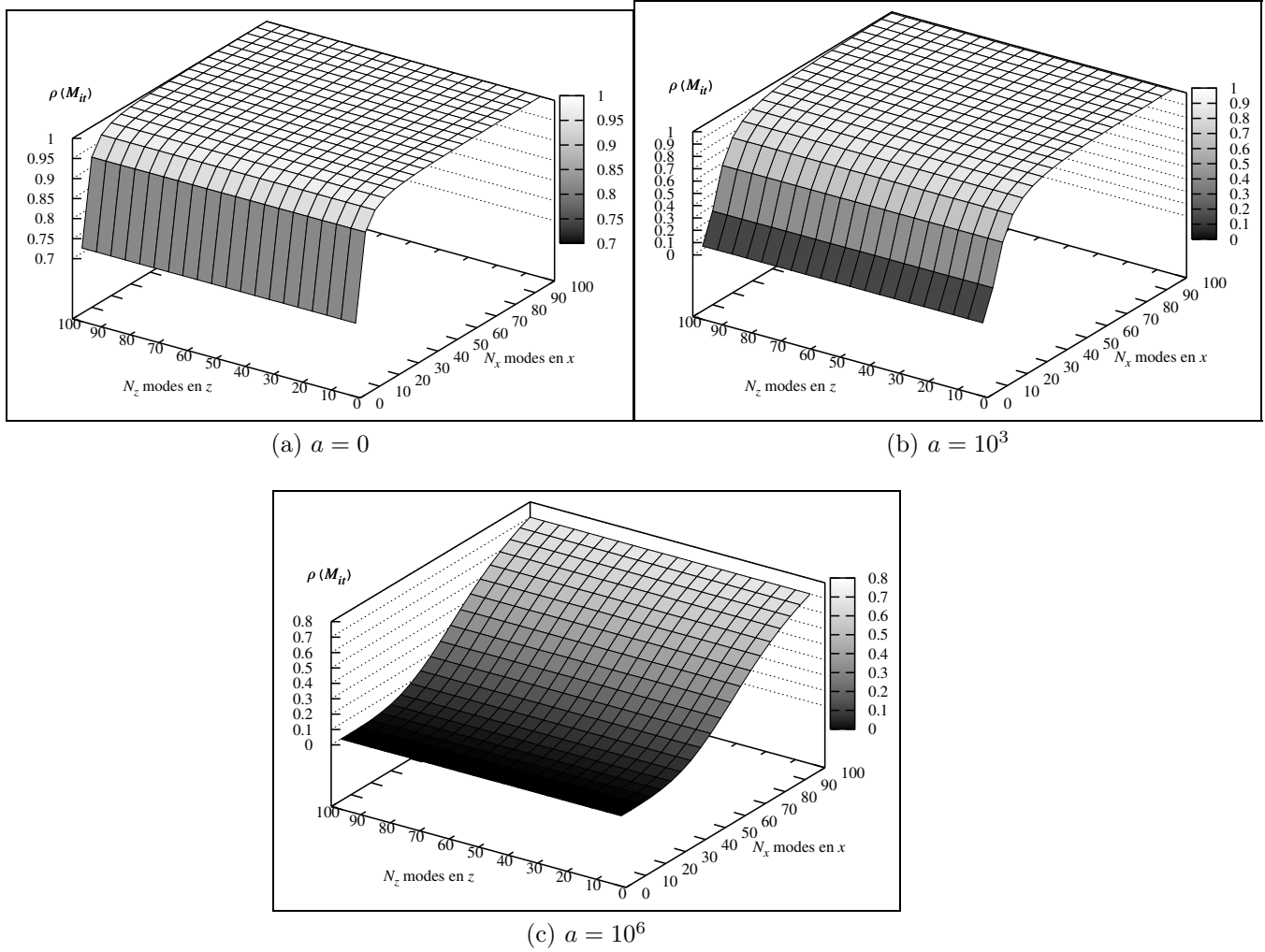


FIGURE 5.6 – Rayon spectral, cas diffusif.

de celle-ci dans le cas diffusif. Pour conclure, l'utilisation de la méthode itérative dans le but de résoudre un problème de Helmholtz à condition mixtes en dérivées s'il est envisageable dans le cas de conditions diffusives, qui sont les seules à être abordées dans cette thèse, est trop coûteux pour être mis en œuvre.

### 5.2.3 Conclusions

La méthode itérative se révèle bien adaptée au traitement de problèmes de Helmholtz à conditions mixtes non uniformes. Le caractère spectral de la méthode n'est pas détérioré par sa formulation itérative comme mis en évidence par la figure 5.3. La décroissance exponentielle avec le maillage est bien observée. Le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence de la solution est raisonnable (au plus 30 itérations) et permet d'envisager l'application de la

méthode à la résolution des équations de Navier-Stokes.

Dans le cas de conditions mixtes en dérivées, celle-ci se révèle moins intéressante. Il n'est possible d'obtenir de solution numérique que pour des conditions diffusives, la méthode divergeant pour le cas anti-diffusif. Même en se limitant au cas favorable, le nombre d'itérations nécessaires pour converger est rédhibitoire. Le coût en temps de calcul sera trop important pour envisager de l'appliquer à la résolution des équations de Navier-Stokes.

## 5.3 Méthode directe

L'algorithme direct formulé en section 4.2.3 permet de s'affranchir des coûts en temps de calcul propres à la méthode itérative. Comparée à l'algorithme de diagonalisations successive la diagonalisation par blocs nécessite un plus grand espace de stockage pour le changement de base, ainsi que le calcul d'un plus grand nombre de valeurs propres et vecteurs propres lors de l'initialisation. Néanmoins le nombre d'opérations effectuées à chaque pas de temps lors de la résolution des équations de Navier-Stokes est quasiment inchangé.

Les résultats de calculs sur le cas test décrit en section 5.1.2 sont présentés pour les mêmes maillages et les mêmes valeurs de la constante de Helmholtz.

### 5.3.1 Validation et comparaison avec la méthode itérative

Le comportement de la diagonalisation par blocs est évalué séparément pour le cas diffusif et le cas anti-diffusif.

#### 5.3.1.1 Cas $\alpha_{1\pm} < 0$ : diffusion

La figure 5.7 montre l'évolution de l'écart relatif à la solution analytique  $\varepsilon$  en échelle logarithmique en fonction du maillage et pour différentes valeurs de la constante de Helmholtz. Le comportement de la méthode directe est similaire à celui de l'algorithme itératif. L'erreur décroît exponentiellement avec le maillage sur un intervalle allant de  $5 \times 5$  à  $20 \times 20$ . Au delà, les erreurs d'arrondi saturent et dégradent la précision de l'approximation numérique. La diagonalisation par blocs permet de traiter les problèmes de Helmholtz et de Poisson, l'erreur commise étant d'autant moins importante que la constante de Helmholtz  $a$  est grande.

#### 5.3.1.2 Cas $\alpha_{1\pm} > 0$ : anti-diffusion

Pour des conditions aux limites anti-diffusives, les résultats sont tout à fait similaires à ceux du cas diffusif. La méthode ne rencontre pas de difficulté particulière contrairement à l'algorithme itératif qui ne converge pas. La figure 5.8 montre que la zone de décroissance exponentielle est toujours sur l'intervalle  $5 \times 5$  à  $20 \times 20$  et qu'au delà, les erreurs de troncature croissent, détériorant la précision de la solution. Il apparaît toutefois qu'à maillage et constante de Helmholtz égaux, l'erreur commise est légèrement supérieure à celle observable dans le cas diffusif (figure 5.4).

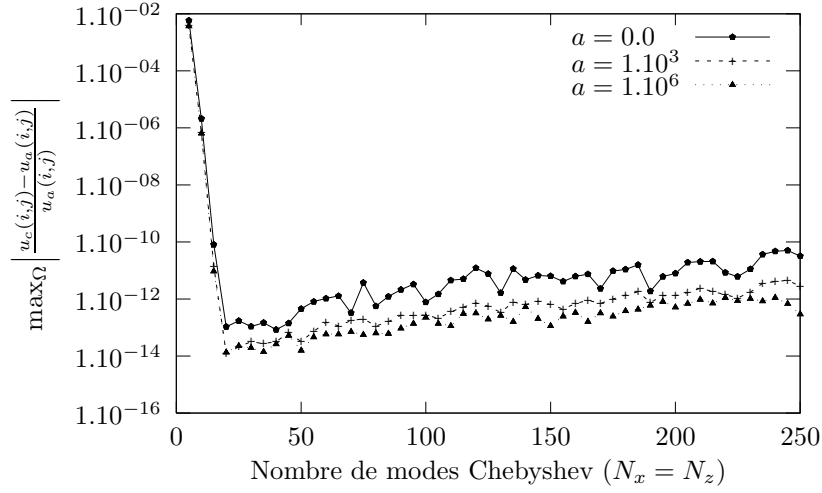


FIGURE 5.7 – Cas diffusif (méthode directe).

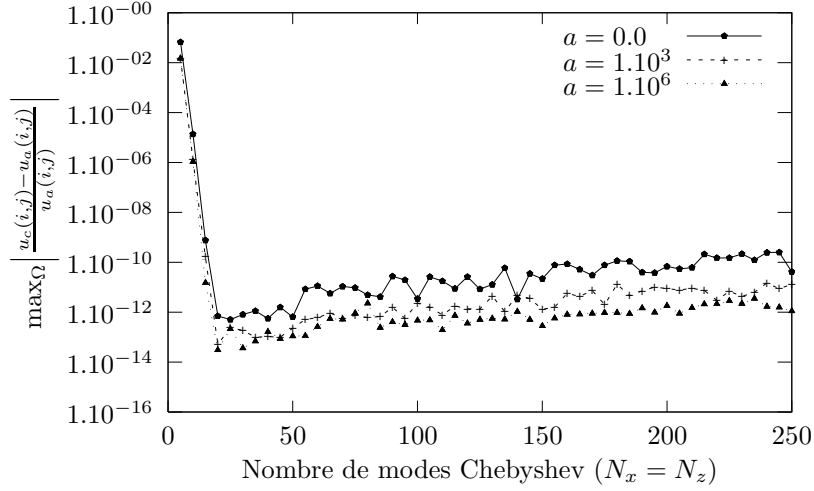


FIGURE 5.8 – Cas anti-diffusif (méthode directe).

### 5.3.1.3 Conclusion

La diagonalisation par blocs se révèle capable de traiter aussi bien le cas diffusif que le cas anti-diffusif qui n'est pas accessible à la méthode itérative. Les bonnes propriétés de convergence exponentielle de l'approximation avec le maillage des méthodes spectrales sont conservées (figures 5.7 et 5.8). D'autre part, cette méthode est directe : il n'est pas nécessaire d'itérer pour obtenir la solution numérique. Ceci permet de s'affranchir des problèmes de convergence de la méthode itérative. De plus, la section 4.2.3 montre que cette méthode a un coût équivalent à celui des diagonalisations successives pour le traitement de Navier-Stokes. Elle sera utilisée par la suite pour introduire des conditions mixtes en dérivées dans les modèles des configurations étudiées.

# CAVITÉ CHAUFFÉE PAR LE BAS COMPORTANT DES PAROIS LATÉRALES DIFFUSIVES

La méthode de diagonalisation par blocs est maintenant appliquée au problème de convection thermique décrit en section 3.3. Tout d'abord, ceci va permettre de compléter les tests du chapitre précédent dans lequel l'équation de Helmholtz est indépendante du temps. Le cas traité ici nécessite de résoudre les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de la chaleur. Il sera utilisé pour vérifier que la gestion des conditions aux limites n'altère pas la consistance du schéma numérique de manière notable. D'autre part, à la différence de la cuve différentiellement chauffée où la condition mixte en dérivées intervient sur la vitesse (3.4.3), la condition s'applique ici sur le champ de température, ce qui garanti la régularité du problème associé à la vitesse (ceci sera développé par la suite dans ce chapitre). L'extension de la formulation à la prise en compte de parois diffusives permet de d'effectuer des simulations dans les cas limites de parois adiabatiques  $C_w \rightarrow 0$  ou parfaitement conductrices  $C_w \rightarrow \infty$  et aussi d'explorer les états intermédiaires mal connus.

La convergence de la méthode en pas d'espace et la stabilité du schéma temporel sont discutés pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh. Le comportement de la divergence avec le maillage est examiné en détails. La détermination des seuils de déclenchement de la convection permet de comparer les résultats aux études de Platten et Legros [117], Davis [37] et Catton [26]. Ces seuils sont déterminés numériquement en utilisant les propriétés de l'écoulement suivant la théorie des bifurcations. La sensibilité des valeurs de  $Ra_c$  en fait un test de choix pour la méthode spectrale. Les coefficients d'échange thermique sont représentés en fonction du coefficient de paroi  $C_w$  pour trois facteurs de forme  $A_H = 1, \frac{1}{2}$  et 2. Le fluide étudié est de l'air de nombre de Prandtl égal à 0,71.

## 6.1 Estimations de coût en 2D

Une estimation a priori du coût de chaque méthode peut être obtenue en dénombrant les éléments de mémoire nécessaires au stockage des opérateurs et les additions, multiplications et divisions effectuées pour résoudre l'équation de Helmholtz scalaire. Le tableau 6.1 présente ces évaluations pour un maillage de  $N_x \times N_z$  nœuds. En considérant uniquement le cas  $N_x = N_z = N$  la diagonalisation successive se révèle être la moins coûteuse en mémoire avec de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$  éléments, suivie par la diagonalisation par blocs qui varie en  $\mathcal{O}(N^3)$  et l'inversion directe en  $\mathcal{O}(N^4)$ . Du point de vue du nombre d'opérations la diagonalisation par blocs est équivalente aux diagonalisations successives avec  $\mathcal{O}(N^3)$  additions et multiplications et  $\mathcal{O}(N^2)$  divisions que l'on peut négliger. L'inversion directe reste la plus coûteuse car elle nécessite  $\mathcal{O}(N^4)$  additions et multiplications.

		Méthodes Utilisées		
		Diagonalisations Successives	Tensorisation Partielle	Inversion directe du Helmholtz
place mémoire nécessaire				
matrices de passage	$\vec{e}_x$	$2N_x^2$	$2N_x^2 N_z$	inutile
	$\vec{e}_z$	$2N_z^2$	$2N_z^2$	inutile
opérateur inversé		inutile	inutile	$N_x^2 N_z^2$
valeurs propres		$N_x N_z$	$N_x N_z$	inutile
nombre total d'éléments		$2(N_x^2 + N_z^2) + N_x N_z$	$2(N_x^2 N_z + N_z^2) + N_x N_z$	$N_x^2 N_z^2$
nombre d'opérations effectuées				
changements de base	$\vec{e}_x$	$2N_z N_x^2$ ( $\times$ ) et (+)	$2N_z N_x^2$ ( $\times$ ) et (+)	aucun
	$\vec{e}_z$	$2N_x N_z^2$ ( $\times$ ) et (+)	$2N_x N_z^2$ ( $\times$ ) et (+)	aucun
calcul de la solution		$N_x N_z$ (/) : $\frac{\gamma_i}{\lambda_i}$	$N_x N_z$ (/) : $\frac{\gamma_i}{\lambda_i}$	$2N_x^2 N_z^2$ ( $\times$ ) et (+)

TABLE 6.1 – Coûts en termes de stockage et de nombre d'opérations : addition (+), multiplication ( $\times$ ) et division (/).

Cette analyse est confirmée par l'évaluation numérique du temps de calcul consommé par chaque méthode. Le temps CPU écoulé est mesuré sur un calcul de 2000 pas de temps pour une configuration avec parois latérales adiabatiques :  $C_w = 0$ . Ce choix permet d'effectuer les comparaisons entre les trois méthodes pour une valeur identique du paramètre  $C_w$ , les champs

solution obtenus sont alors identiques à  $10^{-12}$  près. Le pas de temps est fixé à ( $\delta t = 10^{-3}$ ), le nombre de Rayleigh à  $Ra = 3500$  et le nombre de Prandtl à  $Pr = 0,71$ . Les calculs sont effectués pour différents maillages. L'évolution du temps de calcul est présenté en secondes dans le tableau 6.2. Pour chaque méthode, la première colonne correspond au temps écoulé lors de l'initialisation (calcul des opérateurs, diagonalisation, inversion), la seconde au temps écoulé pour les 2000 itérations temporelles. Les calculs sont effectuées sur une station de travail SGI indigo 2 dans des conditions similaires pour chaque exécution ce qui assure la cohérence des résultats.

maillage	diagonalisations successives		diagonalisation par blocs		inversion directe du Helmholtz	
15×15	0,007	60,233	0,151	65,958	2,607	80,500
30×30	0,395	409,875	1,516	451,951	185,572	761,260
50×50	1,618	1790,656	9,619	1990,806	6804,348	4488,353
100×100	11,803	13748,125	128,036	15396,710	– , –	– , –
150×150	39,020	45823,149	612,230	51242,103	– , –	– , –

TABLE 6.2 – Temps CPU en secondes, pour des parois latérales adiabatiques, à  $Ra = 3500$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $\delta t = 1.10^{-3}$ .

La procédure d'inversion directe est par conséquent bien plus coûteuse en temps de calcul que les deux autres, ceci tant pour l'initialisation que pour la partie temporelle. Les deux derniers maillages ne sont pas accessibles par cette méthode sur la machine utilisée pour les tests. La place mémoire nécessaire au stockage des opérateurs devient rapidement prohibitive et ne permet pas d'atteindre des tailles de grilles modérées de  $100 \times 100$ . Le comportement de la diagonalisation par blocs est en accord avec les évaluations précédentes. Le temps consommé par la partie temporelle est très proche de celui des diagonalisations successive et moins important que l'inversion directe. L'initialisation est à peu près 10 fois plus lente que pour les diagonalisations successives, ce qui s'explique par le nombre plus important d'opérateurs stockés (tab. 6.1). Cependant, ce temps est quasiment négligeable en comparaison de celui écoulé lors de la préparation de l'inversion directe. L'évolution des temps de calculs de la partie temporelle est représentée en échelle logarithmique pour chacune des trois méthodes sur la figure 6.1. Une approximation linéaire est obtenue pour chaque méthode à l'aide de la fonction FIT de mathematica. Pour les deux méthodes de diagonalisation, les résultats confirment les estimations avec une dépendance en  $\mathcal{O}(N^3)$ . Pour la méthode d'inversion, la loi obtenue est en  $\mathcal{O}(N^{3.33})$  au lieu de  $\mathcal{O}(N^4)$  prédit ci-dessus. La première cause est que ces estimations s'appliquent pour  $N$  assez grand or, pour l'inversion directe, le nombre de points accessibles est restreint du fait de la place mémoire nécessaire excédant les capacités de la machine de test. D'autre part le problème en lui-même comporte 3 champs scalaires, 2 pour la vitesse et 1 pour la température, dont seul le dernier est éventuellement géré par une autre méthode que les diagonalisation successives. Dans le cas de la diagonalisation par bloc la dépendance en  $N$  n'est pas altérée car elle équivaut aux diagonalisations successives. En revanche, l'inversion directe est d'un ordre en



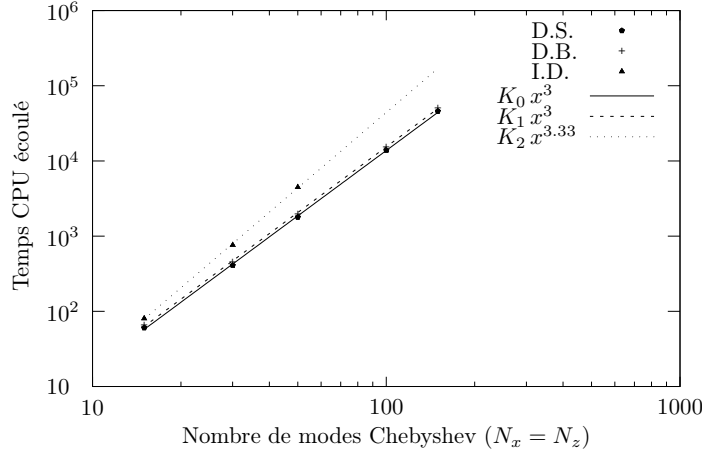


FIGURE 6.1 – Temps de calcul, en secondes, de 2000 itérations pour les diagonalisations successives (D.S.), la diagonalisation par blocs (D.B.) et l’inversion directe (I.D.).

$\mathcal{O}(N^4)$ . Une explication heuristique de la courbe I.D. (fig. 6.1) est qu’en faisant la moyenne des ordres présents pour chaque champ il vient :  $\frac{3+3+4}{3} \simeq 3.33$  soit  $\mathcal{O}(N^{3.33})$ , ceci peut être valable lorsque  $N$  n’est pas trop grand.

## 6.2 Convergence de la méthode

Les propriétés de convergence spatiale et de stabilité du schéma temporel sont à présent discutées.

### 6.2.1 Convergence avec le maillage

Afin de rendre compte de l’influence de la diagonalisation par blocs sur la qualité de la résolution spatiale, les calculs sont effectuées pour  $C_w = 1$  et  $Ra = 6000$  dans le cas d’une cavité carrée,  $A_H = 1$ . Pour cette valeur du coefficient de paroi, les échanges thermique entre le fluide et les parois verticales ne sont a priori pas négligeables et devraient avoir une influence sensible sur le champ de température. Une altération de la convergence de la solution numérique obtenue par la diagonalisation par bloc est alors susceptible de se reporter sur les autres champs. Le nombre de Rayleigh est choisi de manière à ce que l’écoulement soit stationnaire convectif.  tant donné un schéma temporel stable, la convergence numérique spatiale est étudiée sur la solution stationnaire asymptotique.

L’écoulement est considéré comme étant stationnaire lorsque le critère temporel suivant est vérifié à la fois par les champs de vitesse et de température à l’instant  $n$  :

$$\max_{\Omega} \left| \frac{f^n(x, z) - f^{n-1}(x, z)}{f^n(x, z)\delta t} \right| \leq \varepsilon, \quad (6.2.1)$$

qui correspond à l'annulation de la dérivée temporelle de  $f$  en tout point. Les figures 6.2-6.5 sont obtenues pour un pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$  et  $\varepsilon = 10^{-8}$  pour le critère temporel. Elles représentent respectivement la convergence de l'erreur relative sur l'énergie thermique,  $E_q$ , l'énergie cinétique,  $E_c$ , la fonction de courant,  $\psi$  et le rotationnel de la vitesse,  $\vec{\text{Rot}}(\vec{v})$  noté  $\omega$ , en variables adimensionnées. Pour chaque maillage ces grandeurs ne sont pas connues aux mêmes positions d'espace. L'utilisation de la norme  $L_2$ ,  $\|\cdot\|_{L_2} = (\int_{\Omega} |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$  permet d'effectuer les comparaisons sur une valeur dépendant globalement de la résolution spatiale. Pour alléger l'écriture,  $E_q$ ,  $E_c$ ,  $\psi$  et  $\omega$  désigneront leur norme  $L_2$  sur le domaine. Ne connaissant pas la solution analytique, l'erreur sera remplacée par l'écart relatif à la meilleure résolution spatiale disponible. Cet écart possède la même dépendance en pas d'espace que l'erreur suffisamment loin de la solution de référence. Les maillages considérés variant de  $30 \times 30$  à  $250 \times 250$ , l'écart sur un champ  $f$  s'écrira  $\delta f = \left| \frac{f_N - f_{250}}{f_{250}} \right|$  pour  $N \times N$  modes de Chebyshev.

La figure (6.2) montre que  $\ln(\delta E_q)$  décroît linéairement pour  $40 \leq N \leq 210$ , ce qui correspond à une décroissance exponentielle de l'erreur avec le maillage et caractérise la précision spectrale. De même pour l'énergie cinétique fig. 6.3, la fonction de courant fig. 6.4 et le rotationnel fig. 6.5. Les propriétés de convergence spatiale sont vérifiées.

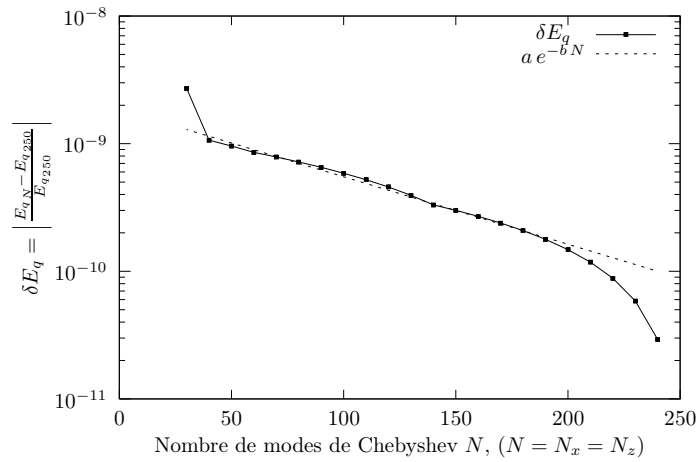
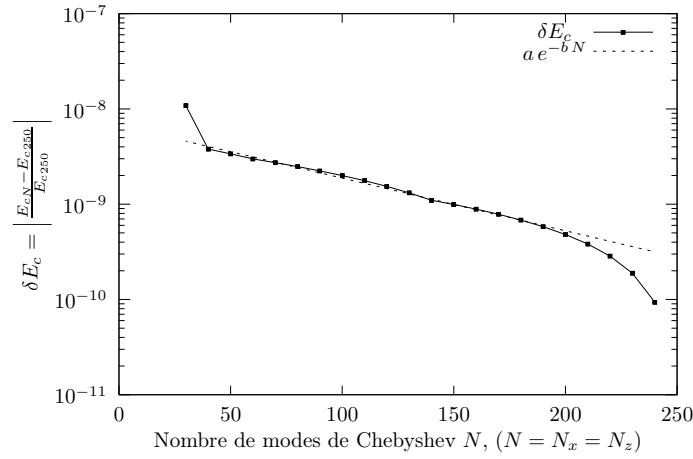
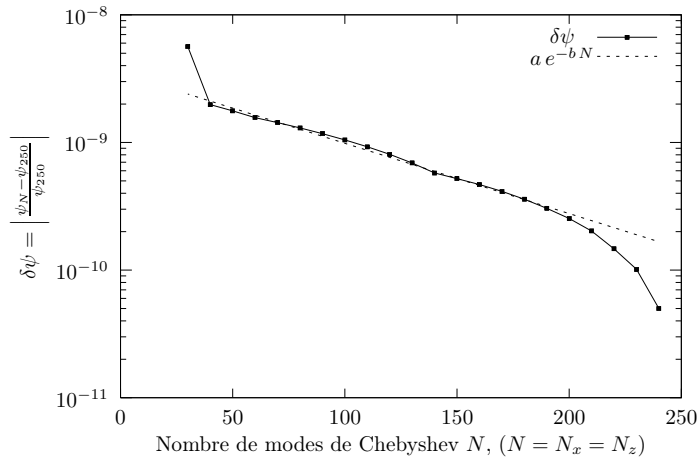
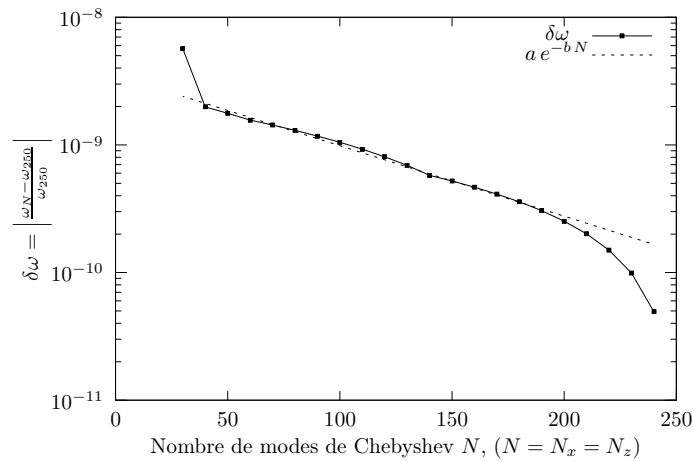


FIGURE 6.2 – Convergence de l'énergie thermique  $E_q$  avec le maillage,  $b = 1, 22 \cdot 10^{-2}$ .

### 6.2.2 Schéma temporel

La stabilité du schéma temporel est testée en ajoutant une perturbation aléatoire d'amplitude  $10^{-4}$  à un écoulement convergeant vers un état stationnaire à  $Ra = 6000$ . Pour un schéma stable une perturbation d'amplitude finie doit rester bornée sur un intervalle de temps fini. Dans le cas d'un état de départ stationnaire stable, l'écoulement perturbé retourne asymptotiquement à l'état stationnaire. Les figures 6.6a et 6.6b représentent l'historique de la composante verticale de la vitesse,  $w$ , en un point de la cavité situé près du maximum de vitesse verticale, superposé à l'historique du même écoulement perturbé, pour des pas de temps respectifs  $\delta t = 10^{-3}$  et

FIGURE 6.3 – Convergence de l'énergie cinétique  $E_c$  avec le maillage,  $b = 1, 27 \cdot 10^{-2}$ .FIGURE 6.4 – Convergence de la fonction de courant  $\psi$  avec le maillage,  $b = 1, 27 \cdot 10^{-2}$ .FIGURE 6.5 – Convergence du rotationnel de la vitesse  $\omega$  avec le maillage,  $b = 1, 27 \cdot 10^{-2}$ .

$\delta t = 6.10^{-4}$ . Ces deux figures montrent qu'un écoulement perturbé retourne bien vers l'état de base. La durée d'extinction d'une perturbation est de l'ordre de 40 fois l'échelle de temps adimensionnée pour les deux pas de temps. Bien que les deux perturbations soient différentes elles sont de même amplitude. Le temps d'extinction correspond au temps de dissipation par l'écoulement de l'énergie apportée. Pour compléter l'étude du schéma temporel il est nécessaire

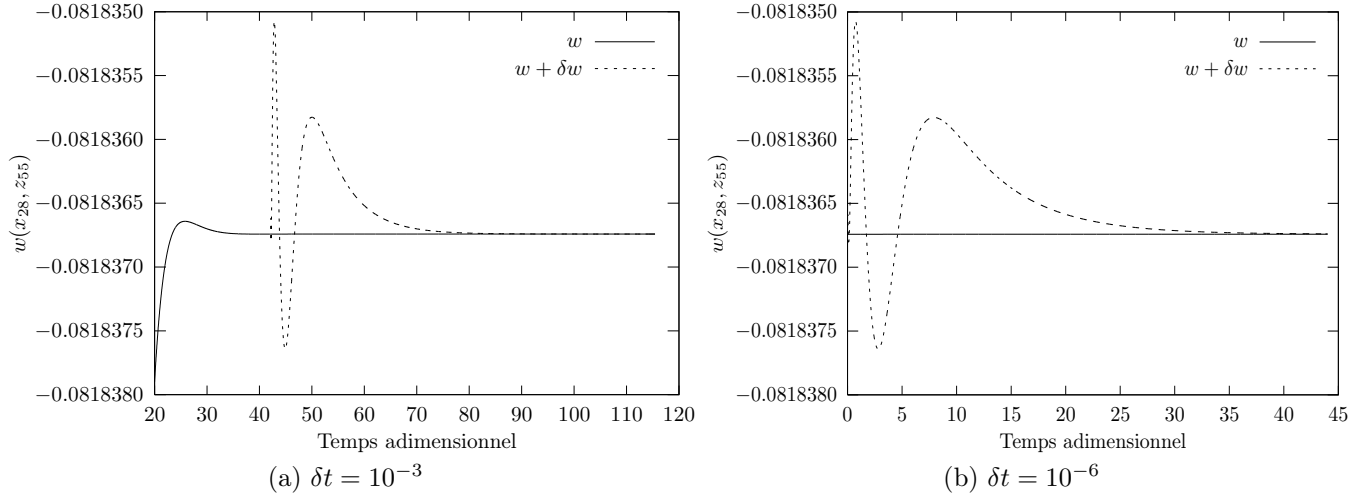


FIGURE 6.6 – Évolution temporelle d'un écoulement perturbé.

d'évaluer son ordre effectif. Pour le code utilisant les diagonalisations successives celui-ci à été déterminé dans la cas du problème de Stokes sur un cas test analytique par Batoul *et al.* [10] et plus récemment par Leriche *et al.* [97] où le découplage vitesse-pression est comparé à d'autres méthodes. Millour *et al.* [103] ont pu vérifier l'ordre du même code sur un état périodique d'un écoulement de convection thermosolutale.

L'ordre effectif du schéma temporel n'a pu être mesuré. Les vérifications portant sur un cas réel et ne disposant pas d'une solution périodique, les tentatives ont porté sur le calcul d'une solution numérique  $S(T)$  pendant un intervalle de temps  $T$ , à  $Ra = 6000$  et un maillage  $80 \times 80$  jugé suffisant pour garantir une résolution spatiale en deçà des erreurs temporelles. L'initialisation a été effectuée avec une solution stationnaire  $S_0$  à  $Ra = 5800$ , au pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$  et considérée comme étant convergée lorsque l'amplitude des variations observées entre deux pas de temps se limite au bruit numérique (variations erratiques d'amplitude entre  $10^{-13}$  et  $10^{-11}$ ). Le calcul de l'ordre effectif peut être évalué en choisissant des pas de temps successifs  $\delta t_0, \delta t_1, \dots, \delta t_n$  vérifiant  $\delta t_j = \frac{1}{2}\delta t_{j-1}$ . Dans ce cas en remarquant que  $S_j(T) = S^*(T) + C(\delta t_j)^{-k}$ , où  $S^*(T)$  est la solution exacte au temps  $T$ , l'ordre effectif est donné par la relation :

$$k = -\log_2 \left( \frac{S_{j+1}(T) - S_j(T)}{S_j(T) - S_{j-1}(T)} \right).$$

Il s'est avéré que  $k$  ne convergeait pas forcément selon le champ et la position considérée dans le domaine. Ceci est très certainement lié à l'écoulement utilisé pour tester l'ordre temporel,

et au fait que la constante  $C$  peut en fait dépendre du pas de temps utilisé. Néanmoins les champs convergent avec le pas de temps, comme le montre le tableau 6.3. Des vérifications de

$Ra = 6000$ Maillage $80 \times 80$				
$\delta t$	$\ \psi\ _{L2}$	$\ \omega\ _{L2}$	$\ E_c\ _{L2}$	$\ E_q\ _{L2}$
$1.10^{-3}$	$0.3853162167.10^{-1}$	1.42486676	$0,12080315080.10^{-1}$	0,54355210573
$5.10^{-4}$	$0.3853162378.10^{-1}$	1.42486684	$0,12080316364.10^{-1}$	0,54355209457
$2, 5.10^{-4}$	$0.3853162484.10^{-1}$	1.42486688	$0,12080317005.10^{-1}$	0,54355208898
$1.25.10^{-4}$	$0,3853162536.10^{-1}$	1,42486690	$0,12080317325.10^{-1}$	0,54355208619

TABLE 6.3 – Convergence des champs avec le pas de temps.

l'ordre temporel d'un schéma pour une résolution spectrale sur un écoulement transitoire ont été effectuées par Botella [16]. Elles portaient sur une solution analytique et ont mis en évidence l'influence de l'initialisation et la nécessité d'utiliser un intervalle de temps suffisamment long pour s'en affranchir.

En conclusion si l'ordre effectif du schéma n'a pu être déterminé celui-ci s'est avéré être stable. La consistance de la méthode a été discutée par Leriche et Labrosse [98]. La consistance et la stabilité du schéma assurent la convergence des solutions numériques par le théorème de Lax.

### 6.2.3 Décroissance de la divergence

Le comportement de la divergence est à présent examiné de manière détaillée. Bien que l'écoulement soit incompressible, la divergence numérique de la vitesse n'est pas imposée nulle, mais converge vers zéro avec le maillage. Ceci résulte du découplage vitesse-pression suivant l'algorithme de projection diffusion décrit en section 4.1.2. Le champ de vitesse n'étant pas connu de manière exacte pour un maillage donné il n'est pas choquant que la divergence numérique de ce même champ de vitesse diffère de zéro. En revanche il est nécessaire de s'assurer qu'elle tende vers 0 avec le maillage tandis que les champs calculés convergent. De plus la décroissance de la divergence avec la résolution spatiale devrait être exponentielle pour un champ de vitesse régulier. Cette propriété servira par la suite de critère pour qualifier la régularité des solutions obtenues dans les cas de la cavité entraînée et de la cuve thermocapillaire.

La figure 6.7 montre la convergence du maximum de divergence relative sur le domaine pour des parois adiabatiques. Les maxima sont reportés en échelle logarithmique. Les résultats sont obtenus soit par diagonalisations successives 6.7a soit par diagonalisation par blocs 6.7b. Les deux courbes sont identiques. La décroissance exponentielle de la divergence avec le maillage est observée pour un nombre de points de collocation compris entre  $70 \times 70$  et  $240 \times 240$  où les résultats sont alignés.

La figure 6.8a présente l'évolution de la divergence avec le maillage pour un coefficient de paroi  $C_w = 1$  et différents pas de temps. Pour des pas de temps compris entre  $10^{-3}$  et  $5.10^{-5}$  les courbes sont quasiment superposées (pour  $N > 70$ ). Pour  $\delta t$  égal à  $10^{-5}$  et  $5.10^{-6}$  les courbes

rejoignent celles des pas de temps discutés précédemment à partir de  $130 \times 130$  modes environ. Pour  $\delta t = 10^{-6}$  la courbe se rapproche des autres lorsque le maillage est raffiné mais le nombre de modes nécessaires dépasse les  $250 \times 250$ . Ceci montre que lorsque la résolution spatiale est suffisamment fine devant la résolution temporelle le pas de temps n'a pas d'influence sur l'évaluation de la divergence. Ceci résulte de l'algorithme de projection diffusion qui permet de connaître le champ de pression assurant l'incompressibilité directement au temps  $n + 1$  sans nécessiter l'introduction d'un schéma temporel sur celle-ci. Pour des pas de temps raisonnables :  $\delta t \leq 5 \cdot 10^{-5}$  la décroissance exponentielle de la divergence est observée entre  $90 \times 90$  et  $200 \times 200$  et ne dépend pas du pas de temps utilisé. Les figures 6.8(b-d) montrent la divergence pour trois

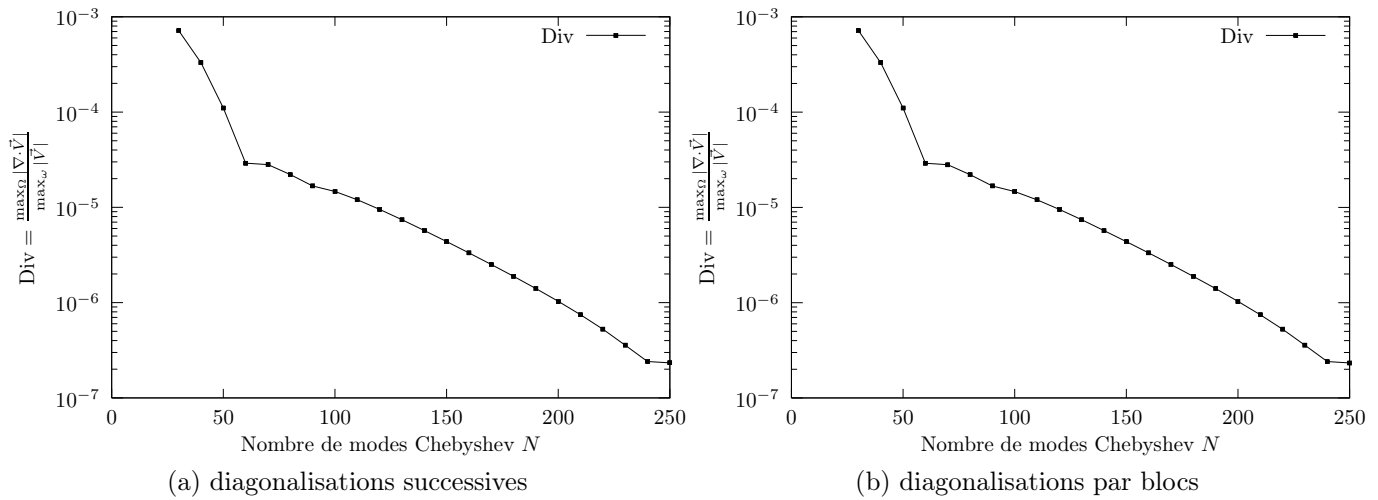


FIGURE 6.7 – Évolution de la divergence,  $Ra = 6000$ ,  $C_w = 0$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

valeurs du coefficient de paroi  $C_w = 10^{-3}, 1, 10^3$  et un pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ . Dans les trois cas la divergence décroît exponentiellement avec le maillage. Pour  $C_w = 10^{-3}$  ce comportement s'observe pour un nombre de modes entre  $70 \times 70$  et  $240 \times 240$  comme pour  $C_w = 0$  (fig. 6.7b). Pour  $C_w = 1$  ce nombre est compris entre  $50 \times 50$  et  $200 \times 200$  et pour  $C_w = 10^3$  entre  $40 \times 40$  et  $170 \times 170$ . La décroissance exponentielle de la divergence est observée quelque soit la valeur du coefficient de paroi  $C_w$ . Le déplacement de l'intervalle est du au changement de structure de l'écoulement résultant de la variation des échanges thermiques entre fluide et paroi paramétrés par  $C_w$ . Ces considérations serviront de référence par la suite pour évaluer la régularité des solutions numériques obtenues.

Par la suite les calculs sont menés avec un pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$  et des maillages de  $40 \times 40$  modes pour  $A_H = 1$ ,  $40 \times 60$  pour  $A_H = \frac{1}{2}$  et  $60 \times 40$  pour  $A_H = 2$ . À ces tailles de grille, la divergence normée par le maximum de vitesse reste voisine de  $10^{-4}$  en régime convectif.

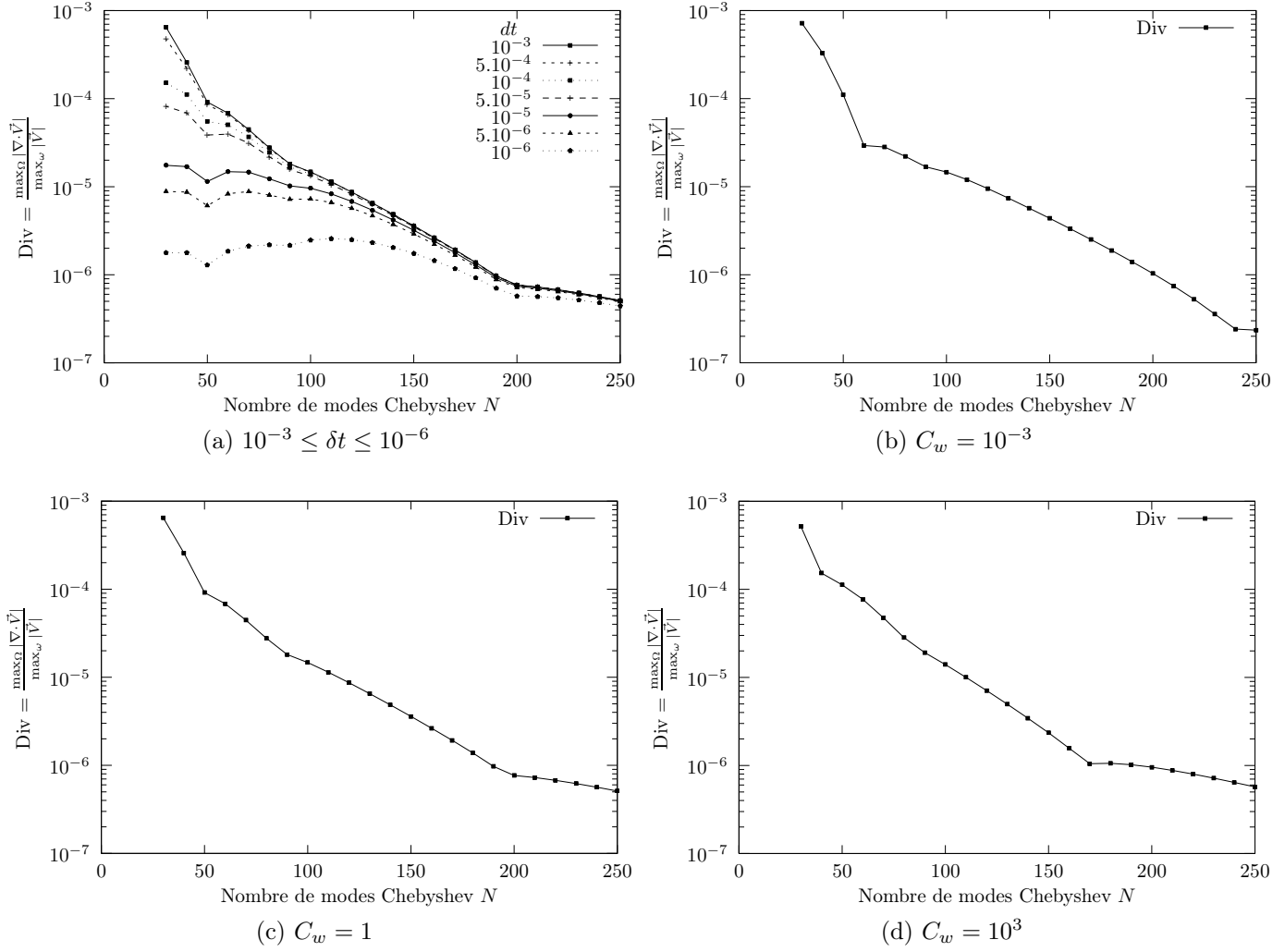


FIGURE 6.8 –  volution de la divergence à  $Ra = 6000$ , (a)  $C_w = 1$  ; (b), (c) et (d)  $\delta t = 10^{-3}$ .

### 6.3 Détermination des seuils de transition

Les seuils de transition de l'état conductif à l'état convectif sont à présent déterminés pour différentes valeurs de  $C_w$  comprises entre  $10^{-3}$  et  $10^3$ . Leur comparaison à des valeurs de la littérature fournit une évaluation de la précision du code utilisé.

La détermination des nombres de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , s'appuie sur l'utilisation de résultats de la théorie de la stabilité linéaire. En 2 dimensions d'espace, la transition de l'écoulement vers l'état convectif est une bifurcation de type fourche supercritique représentée par la forme normale suivante :  $\frac{dX}{dt} = (Ra - Ra_c)X - X^3$ , valable au voisinage de  $Ra_c$ , où  $X$  représente les champs de vitesse et température et  $\frac{dX}{dt}$  est l'opérateur d'évolution temporelle donné par les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'état conductif. Un  tat stationnaire étant

caractérisé par  $\frac{dX}{dt} = 0$ , il y a trois solutions possibles correspondant chacune à un type d'écoulement. La solution  $X = 0$  représente l'état conductif tandis que les solutions  $X = \pm\sqrt{Ra - Ra_c}$  sont symétriques et représentent les états convectifs après la transition. Les champs d'une perturbation de l'état conductif peuvent être décomposés sur la base des vecteurs propres de l'opérateur d'évolution. Il suffit donc de considérer l'évolution d'une perturbation suivant un mode quelconque, notée  $\delta X$ , pour connaître la dynamique de toute perturbation. Étant un mode propre, l'évolution temporelle de  $\delta X$  est donnée par :  $\frac{d\delta X}{dt} = \lambda\delta X$ . D'une part, ceci permet d'affirmer qu'une perturbation infinitésimale de l'état conductif suivant un mode croît ou décroît exponentiellement avec le temps, la stabilité correspondant aux taux de croissances négatifs et l'instabilité aux taux de croissance positifs. D'autre part, en supposant qu'au plus une valeur propre est positive, le système sélectionne le mode associé à la valeur propre  $\lambda$  la plus grande. Les autres devenant négligeables devant celle-ci au bout d'un certain temps. La déstabilisation de l'état conductif correspond alors au changement de signe de la valeur propre dominante. La restriction à l'état conductif de la forme normale :  $\frac{d\delta X}{dt} = (Ra - Ra_c)\delta X$ , représente (dans la cas d'une bifurcation fourche) l'évolution temporelle du vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module, i.e. le mode de perturbation de l'état conductif le plus instable. La polarisation du système sur le mode dominant et l'expression de la forme normale montrent que le taux de croissance d'une perturbation quelconque de l'état stationnaire, évaluée après un temps suffisant pour que les modes secondaires s'éteignent, dépend linéairement du nombre de Rayleigh au voisinage de  $Ra_c$ .

### 6.3.1 Méthodologie

La recherche des seuils s'effectuera de la manière suivante. En premier lieu, le seuil de transition est encadré de manière grossière. Une fois un état convectif obtenu, une perturbation est fabriquée en utilisant un état convectif stationnaire convergé comme condition initiale d'un calcul à un nombre de Rayleigh en deçà du seuil de convection. La convection va alors s'éteindre et relaxer vers l'état conductif. Lorsque le maximum de vitesse est suffisamment faible la dynamique de l'écoulement est correctement décrite par la stabilité linéaire. Les champs peuvent alors être décomposés comme une somme de perturbations, base des modes propres de l'opérateur d'évolution linéarisé. Tous les modes possèdent un taux de croissance négatif car l'état conductif est stable. Le mode dominant étant celui associé au taux de croissance le plus grand, ici le plus proche de zéro, au bout d'un certain temps il domine la dynamique. Lorsque le maximum de vitesse de l'écoulement se situe aux alentours de  $10^{-2}$  les champs sont sauvegardés et utilisés pour déterminer le taux de croissance du mode dominant aux différents nombres de Rayleigh. Une telle perturbation est représentée par la figure 6.9.

Cette perturbation sera utilisée comme initialisation pour un échantillon de nombres de Rayleigh inférieurs à  $Ra_c$ . Les historiques des champs de vitesse et de température en différents points de la cavité permettent de déterminer le taux de croissance du mode dominant pour le nombre de Rayleigh courant. Une méthode de moindres carrés est utilisée pour déterminer les coefficients de l'exponentielle décroissante, de la forme  $a e^{\lambda t}$ , passant au mieux par les points d'historique. Le coefficient  $\lambda$  est alors directement le taux de croissance du mode dominant.



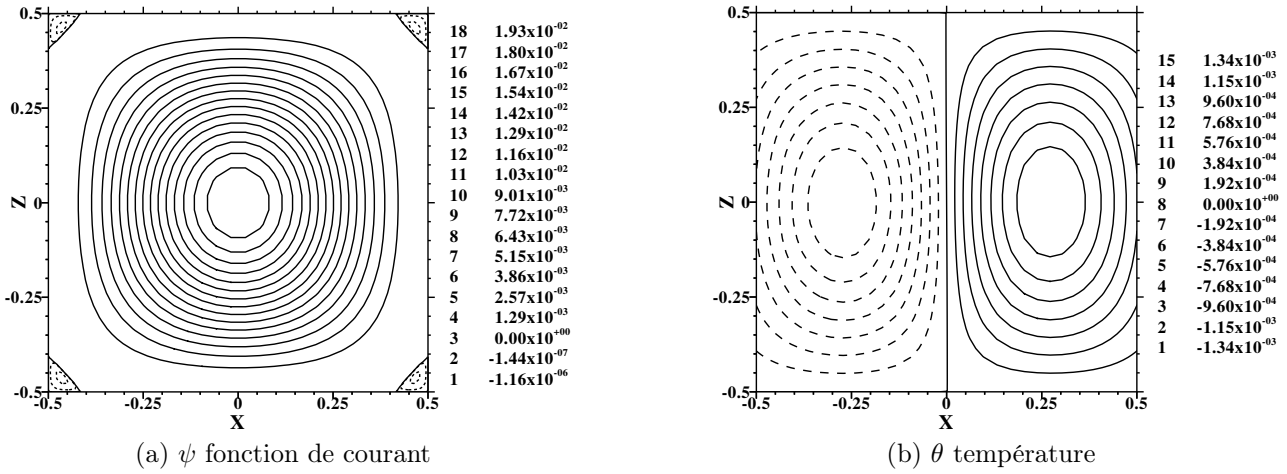
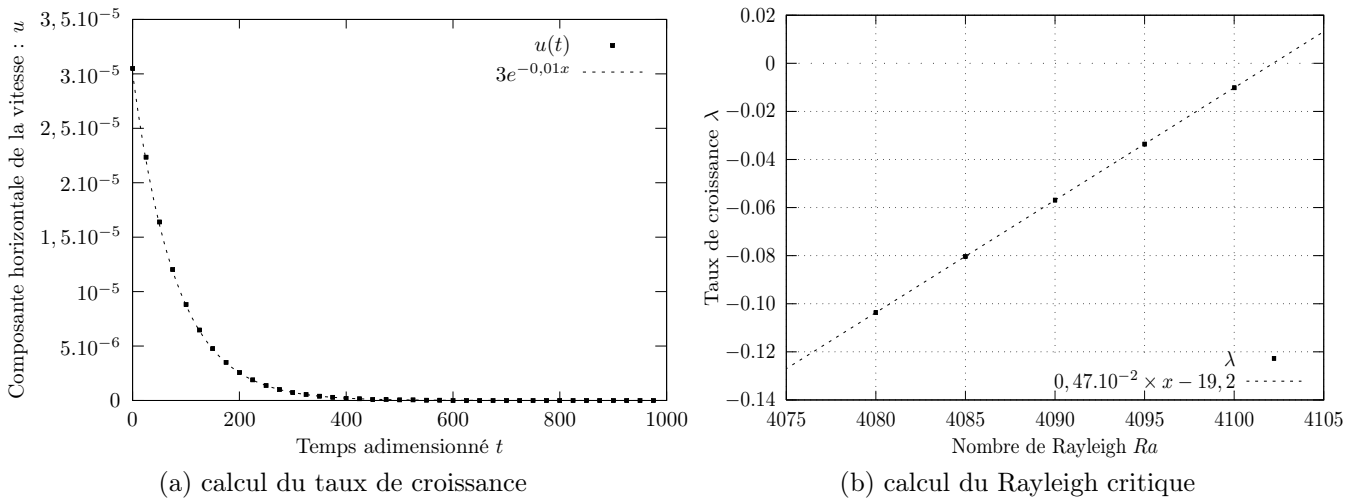


FIGURE 6.9 – Perturbation de l'état conductif.

La figure 6.10a représente la détermination d'un taux de croissance. Le nombre de Rayleigh critique est alors obtenu par une régression linéaire sur un minimum de 5 taux de croissance de l'ordre de  $10^{-2}$ , pour lesquels la forme normale est supposée bien représenter l'évolution du taux de croissance avec le nombre de Rayleigh. La Figure 6.10b montre la détermination du Rayleigh critique associé à un rapport d'aspect  $A_H = 1$  et un coefficient de paroi  $C_w = 1$ .

FIGURE 6.10 –  valuation du seuil de convection pour  $A_h = 1$  et  $C_w = 1$ .

### 6.3.2 Dépendance des seuils au coefficient de paroi

Le tableau 6.4 regroupe les résultats obtenus par la méthode décrite auparavant et ceux issus de la littérature obtenus par des calculs analytiques pour les cas limites de parois adiabatiques Platten et Legros [117] et de parois parfaitement conductrices. Dans le premier cas l'accord constaté est excellent pour les trois rapport d'aspects. Dans le second les valeurs concordent sur les deux premiers chiffres ce qui est tout à fait satisfaisant. En effet Davis [37] a effectué son calcul en 3-D. L'écart entre ces deux résultats s'explique par l'effet non négligeable du confinement qui entraîne une dissipation supplémentaire et décale le seuil vers les valeurs croissantes de  $Ra$ .

	$C_w = 0$ Platten et Legros [117]	$C_w = 0$ cette thèse	$C_w = \infty$ Davis [37]	$C_w = 1$ cette thèse
$A_H = \frac{1}{2}$	12113,10	12113,31	—	32151,27
$A_H = 1$	2585,03	2584,99	5035	5010,30
$A_H = 2$	2013,24	2013,20	—	2384,74

TABLE 6.4 – Comparaison des Rayleigh critiques avec la littérature.

Les courbes de stabilité marginale de l'état conductif en fonction du coefficient de paroi sont représentées sur la figure 6.11 en échelle logarithmique pour les deux axes. Pour le rapport d'aspect  $A_H = 1$  la courbe possède deux tangentes horizontales correspondant aux cas limites des parois adiabatiques ( $C_w \rightarrow 0$ ) et parfaitement conductrices ( $C_w \rightarrow \infty$ ). La valeur du

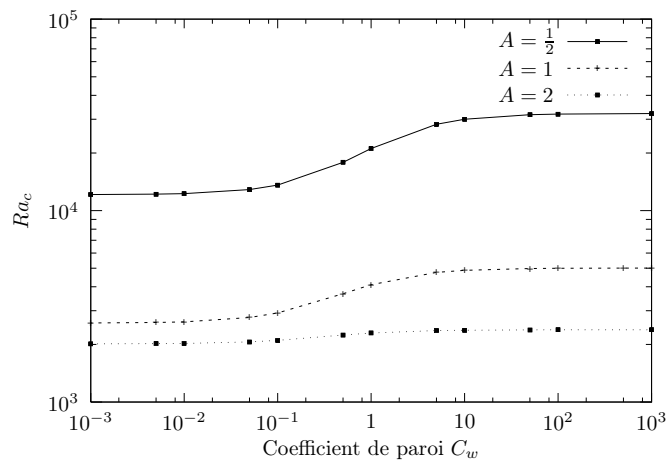


FIGURE 6.11 – Diagrammes de stabilité en fonction de  $C_w$  pour  $A_H = \frac{1}{2}, 1, 2$ .

Rayleigh critique est une fonction croissante de  $C_w$ . La présence des parois conductrices a un effet stabilisant sur l'état hydrostatique. Les variations les plus rapides sont observées au voisinage de  $C_w = 1$ . Ces commentaires s'appliquent aussi aux courbes de stabilité marginale

des deux autres rapports d'aspect  $A_H = \frac{1}{2}$  et 2. Les courbes ne se croisent pas et leurs positions relatives révèlent que l'influence stabilisatrice des parois latérales varie comme l'inverse du rapport d'aspect. Ainsi, pour  $A_H = \frac{1}{2}$ , la valeur de  $Ra_c$  est quasiment tripl e pour des parois conductrices comparées à des parois adiabatiques, alors que pour  $A = 2$ , (allongement horizontal du domaine), l'augmentation de  $Ra_c$  n'est que de 15%. Cette perte de sensibilité de l'écoulement à la thermique des parois latérales pour de grands rapports d'aspect a déjà été observée par Cerisier *et al.* [27].

Pour finir les courbes de stabilité marginale semblent appartenir à une famille de fonction du type  $a e^{b \arctan(x)}$ , où  $a = Ra_c(C_w = 0, A_H)$  paramètre la tangente horizontale en 0 et  $b = \ln\left(\frac{2Ra_c(C_w=\infty, A_H)}{\pi a}\right)$  paramètre la tangente horizontale en  $\infty$ .

## 6.4  tude des échanges thermiques

Afin de mettre en évidence l'influence des parois sur les échanges thermiques globaux au sein de la cavité, les nombres de Nusselt verticaux sont évalués sur les plaques horizontales et moyennés suivant  $x$  :

$$\langle Nu \rangle_H = \frac{1}{A_H} \int_{-\frac{A_H}{2}}^{+\frac{A_H}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial z} dx.$$

Le nombre de Nusselt caractérise le mode de transport thermique. Le transport par conduction étant le mode de référence le nombre de Nusselt correspondant est égal à 1. Le transport thermique par convection est associé à un Nusselt diff rent de 1, en général  $Nu > 1$ . Le choix des nombres de Nusselt verticaux  $Nu_H$  se justifie par la direction du gradient thermique imposé entre les plaques horizontales. Le transport de chaleur se fera donc suivant cette direction à l'état conductif. Lorsque le fluide est dans l'état hydrostatique, le champ de température est indépendant du coefficient de paroi  $C_w$  et les  $Nu$  obtenus peuvent donc être directement comparés entre eux car ils ont le même état de référence. Afin d'obtenir un critère objectif sur l'intensité de la convection permettant de se placer dans des écoulements comparables les calculs seront effectués pour des valeurs de  $Ra$  situées 10% au dessus de la valeur du seuil  $Ra_c$  pour  $A_H$  et  $C_w$  donnés.

### 6.4.1  tats convectifs

Pour comprendre de quelle manière la convection modifie le transport de chaleur, les champs de température et les lignes de courant sont examinés pour les valeurs limites de  $C_w = 0$  et  $10^3 (\simeq \infty)$  ainsi que pour une valeur intermédiaire :  $C_w = 1$ . Les trois rapports d'aspects sont pris en compte et les régimes convectifs correspondants comparés.

La figure 6.12 montre les  tats convectifs correspondant au rapport d'aspect  $A_H = 1$ . Pour les trois valeurs de  $C_w$  il existe une cellule de convection principale. L'écoulement est symétrique par rapport au centre de la cavité et le symétrique de l'écoulement par rapport à l'axe vertical est aussi solution des équations et correspond à une cellule de convection tournant dans le sens

opposé. La bifurcation fourche décrit la brisure de symétrie qui a lieu lorsque le fluide se met en mouvement et sélectionne un sens de rotation. Un examen attentif des isothermes met en évidence le rôle joué par les parois. Dans le cas de parois adiabatiques ( $C_w = 0$ ), les isothermes sont perpendiculaires aux murs latéraux ce qui annule les flux de chaleurs horizontaux. Les isothermes sont resserrées en bas à gauche et en haut à droite ce qui a pour effet d'augmenter les flux de chaleur entre les plaques isothermes et le fluide à ces endroits par rapport à l'état conductif. La convection peut alors être considérée comme une amélioration du transport de chaleur résultant de la seule conduction.

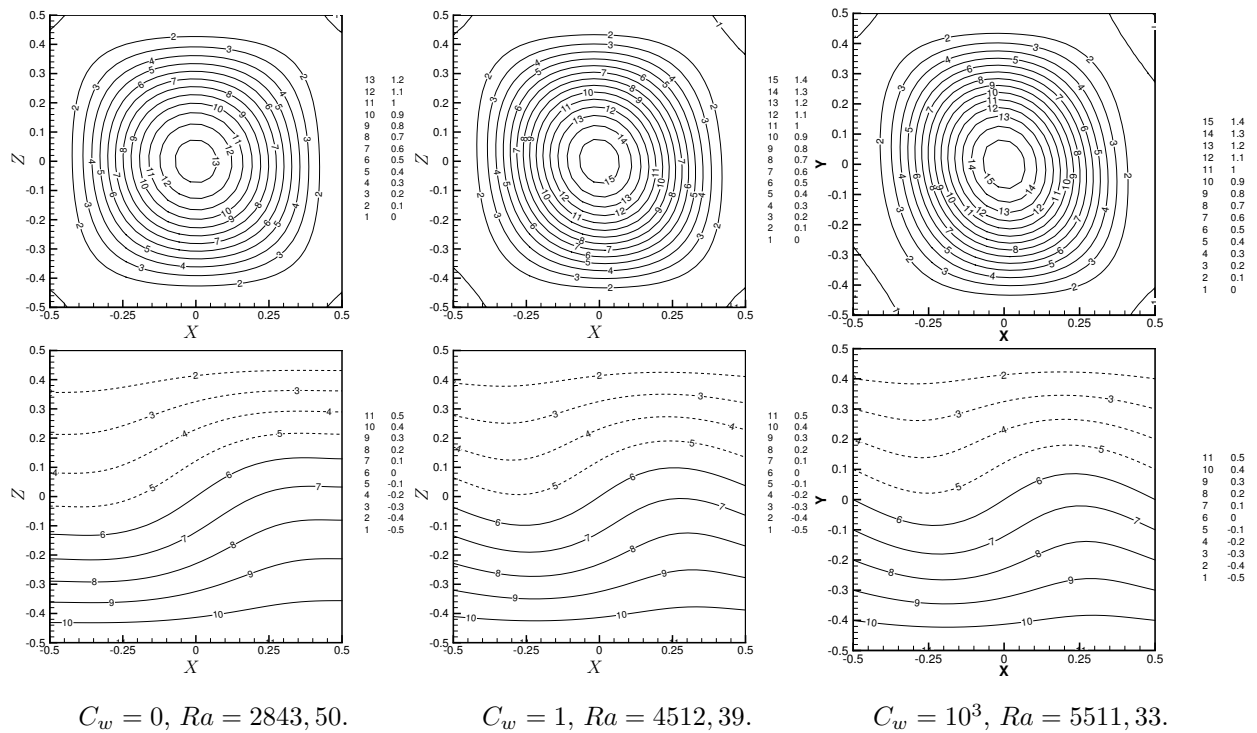


FIGURE 6.12 – Lignes de courant et isothermes pour  $A = 1$ .

Pour  $C_w = 1$ , les isothermes sont convectées par l'écoulement dans tout le domaine  $y$  compris sur les parois verticales. Les échanges horizontaux entre parois et fluide ne sont plus nuls ce qui est visible sur l'angle des isothermes par rapport à l'horizontale au contact des murs verticaux. Le long de ces parois le déplacement des isothermes par le mouvement du fluide est moins important que dans le cas précédent. La diffusivité des parois latérales est source d'une certaine inertie thermique du champ de température face à la convection. Ceci influe sur la forme de la cellule de convection par la modification de la répartition spatiale des forces en volume. Il en résulte une compression de cette structure suivant la diagonale joignant les zones de resserrement des plaques supérieures et inférieures. Pour  $C_w = 10^3$ , les isothermes sont à présent ancrés sur les parois car le caractère parfaitement conducteur de celles-ci impose au profil de température d'être linéaire le long de celles-ci. À Rayleigh égal, La convection est

sensiblement entravée par cette contrainte. La compression de la cellule principale s'en trouve plus prononcée.

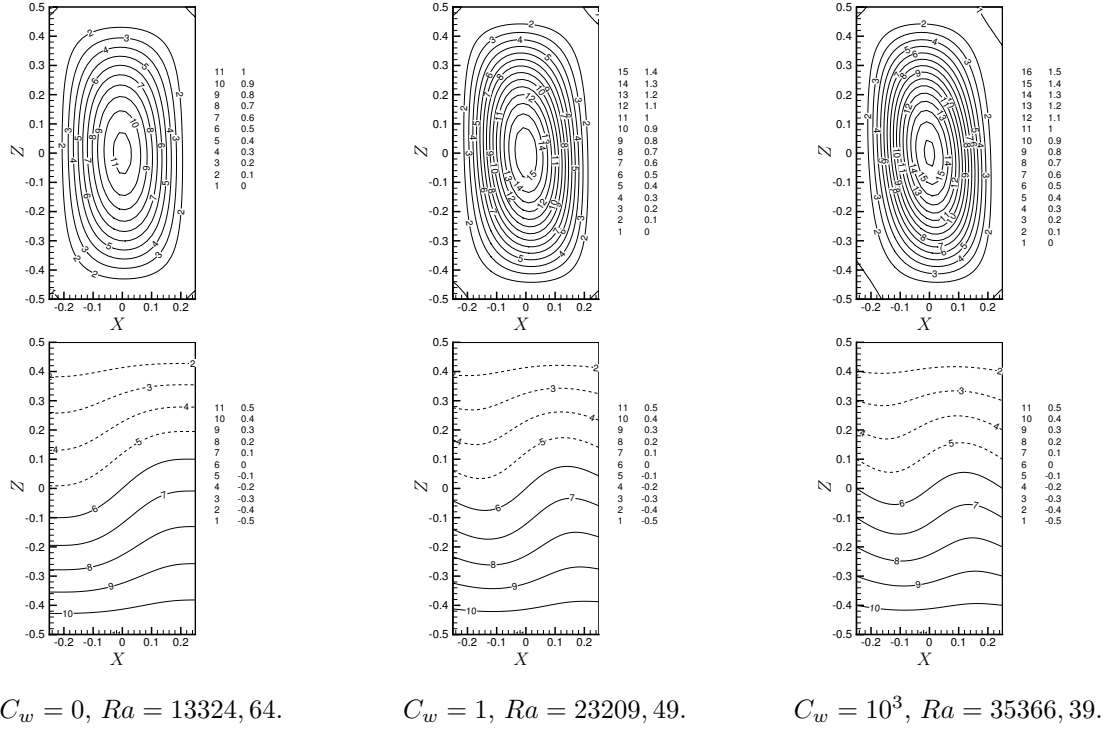


FIGURE 6.13 – Lignes de courant et isothermes pour  $A = \frac{1}{2}$ .

Les écoulements relatifs au rapport d'aspect  $A_H = \frac{1}{2}$  se comportent de la même manière que pour un domaine carré. Il existe une seule cellule de convection et la bifurcation fourche brise la même symétrie que précédemment. L'allongement verticale de la cellule de convection est le résultat du confinement latéral. Ceci explique les valeurs beaucoup plus importantes des nombres de Rayleigh pour lesquelles la convection s'observe. Pour  $C_w = 0$  les échanges thermiques ne sont possibles qu'avec les plaques horizontales. Pour  $C_w = 1$ , il existe à la fois échange thermique avec les plaques verticales et convection des isothermes le long de celles-ci. Pour  $C_w = 10^3$ , les isothermes sont ancrés sur les parois. L'unique cellule de convection est tout d'abord quasiment symétrique par rapport à l'axe verticale puis est progressivement compressée suivant la diagonales joignant les gradients thermiques les plus forts au fur et à mesure que la diffusivité des parois latérales augmente.

Pour le rapport d'aspect  $A_H = 2$ , il est nécessaire de distinguer deux cas car la bifurcation fourche entraîne un comportement des solutions symétriques diff rent de celui discuté précédemment. La présence de deux rouleaux de convection ne change pas l'existence de deux sens de circulation possible lorsque le fluide se met en mouvement, mais cette fois le sens de départ influe sur les transferts verticaux résultants. En vue de l'analyse des échanges thermiques par l'étude des nombre de Nusselt, il convient de détailler la dynamique de chaque cas séparément.

L'écoulement correspondant à un mouvement ascendant du fluide au centre et un mouvement descendant près des parois sera noté cas 1 et l'autre (descendant au centre, ascendant près des bord) cas 2.

La fonction de courant et les isothermes correspondant au cas 1 sont représentés sur la figure 6.14. Pour  $C_w = 0$ , la convection induit l'intensification locale des gradients thermiques au centre de la plaque supérieure et aux extrémités de la plaque inférieure. Les isothermes sont

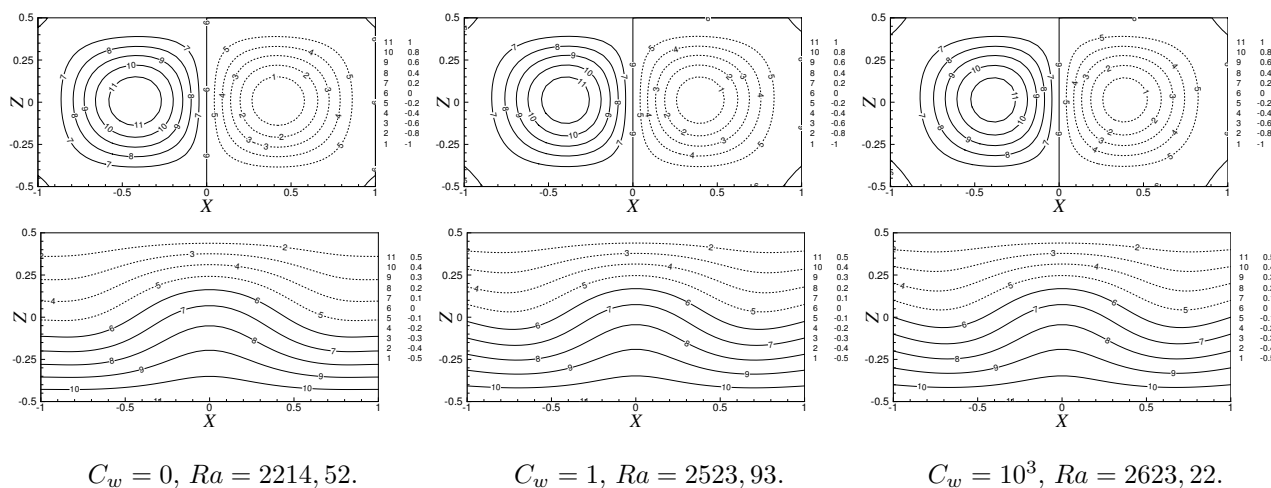


FIGURE 6.14 – Lignes de courant et isothermes pour  $A = 2$ , cas 1.

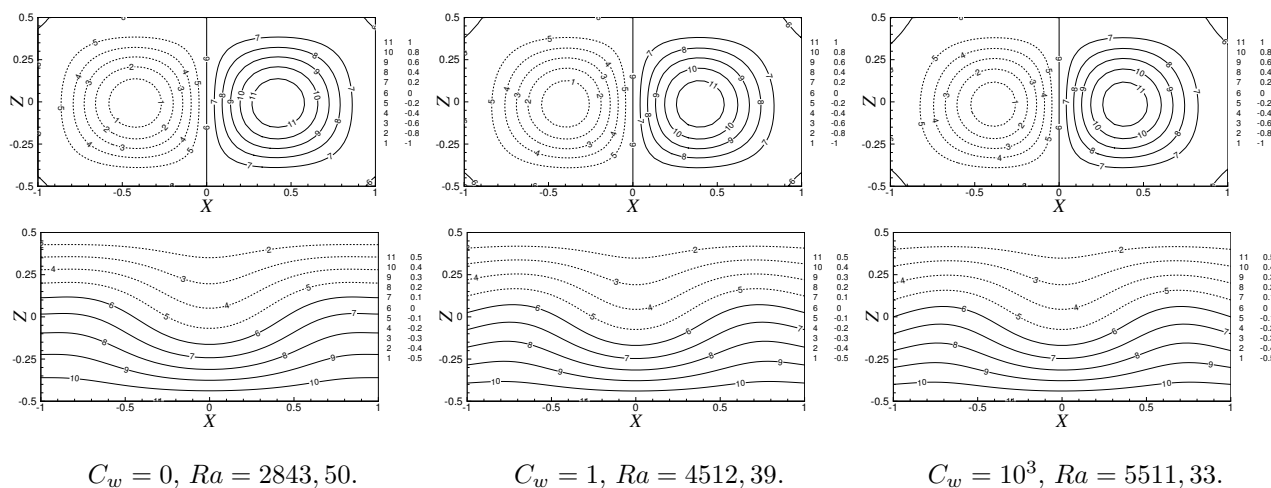


FIGURE 6.15 – Lignes de courant et isothermes pour  $A = 2$ , cas 2.

normales aux parois verticales comme imposé par les conditions de frontière. Pour  $C_w = 1$ , les échanges thermiques horizontaux avec les murs latéraux diminuent les flux de chaleurs verticaux sur la plaque inférieure près des murs en revanche ceux-ci augmentent sur la plaque supérieure.

La région voisine de l'axe verticale située entre les deux rouleaux n'est pratiquement pas affectée par les parois. Sur la fonction de courant ceci se traduit par le resserrement des rouleaux sur l'axe vertical. Pour  $C_w = 10^3$ , les isothermes s'ancrent sur les parois latérales ce qui renforce les effets décrits précédemment. Les flux de chaleur verticaux diminuent un peu plus aux extrémités de la plaque inférieure et augmentent sur la plaque supérieure. La partie près de l'axe vertical n'est pas sensible à la présence des parois verticales. Les rouleaux de convection se resserrent encore plus vers l'axe vertical.

Dans le cas 2 (fig. 6.15) la situation est renversée en ce qui concerne les isothermes mais identique pour la fonction de courant abstraction faite du sens de rotation des rouleaux. C'est maintenant la plaque inférieure qui bénéficie de l'influence des parois latérales lorsque  $C_w$  croît et la plaque supérieure qui en p t t.

### 6.4.2 coefficients d'échanges

Le comportement des nombres de Nusselt verticaux résultant des écoulements décrits dans la section précédente est une conséquence directe des discussions menées ci-dessus.

Sur la figure 6.16 correspondant à un rapport d'aspect  $A_H = 1$  les échanges thermiques de la plaque supérieure diminuent tandis que ceux de la plaque inférieure augmentent. Quelque soit le coefficient de paroi  $C_w$  la somme des Nusselt associés aux plaques verticales est toujours nulle. La symétrie centrale de l'écoulement en est responsable.

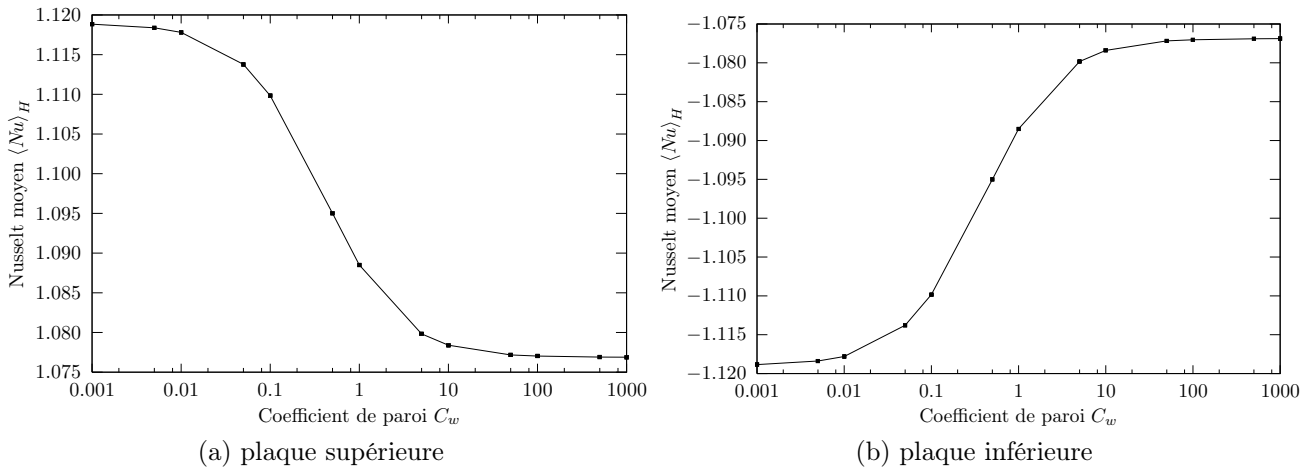


FIGURE 6.16 – Nombre de Nusselt horizontal moyen.

Sur la figure 6.17 qui traite du rapport d'aspect  $A_H = \frac{1}{2}$ , l'évolution des nombres de Nusselt est semblable à ce qui a été dit précédemment, mis à part les valeurs beaucoup plus importantes du nombre de Rayleigh pour lesquelles les calculs ont été menés.

Sur la figure 6.18 l'évolution des nombres de Nusselt avec  $C_w$  montre bien des comportements opposés pour une même plaque suivant qu'il s'agit du cas 1 ou du cas 2. Le nombre  $\langle Nu \rangle_H$  augmente avec  $C_w$  sur la plaque supérieure dans le cas 1 et diminue dans le cas 2. Pour la

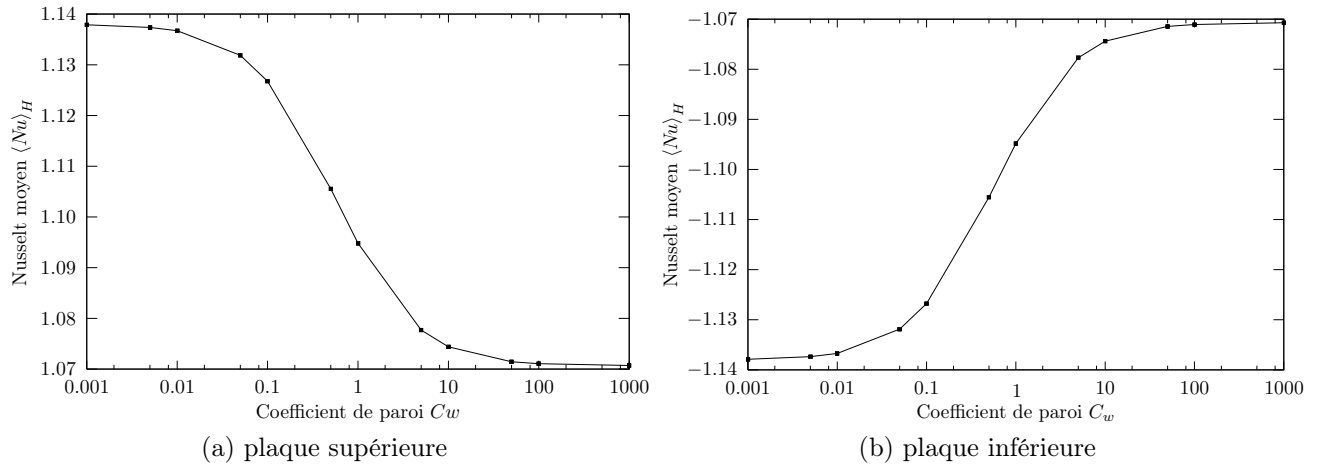


FIGURE 6.17 – Nombre de Nusselt horizontal moyen.

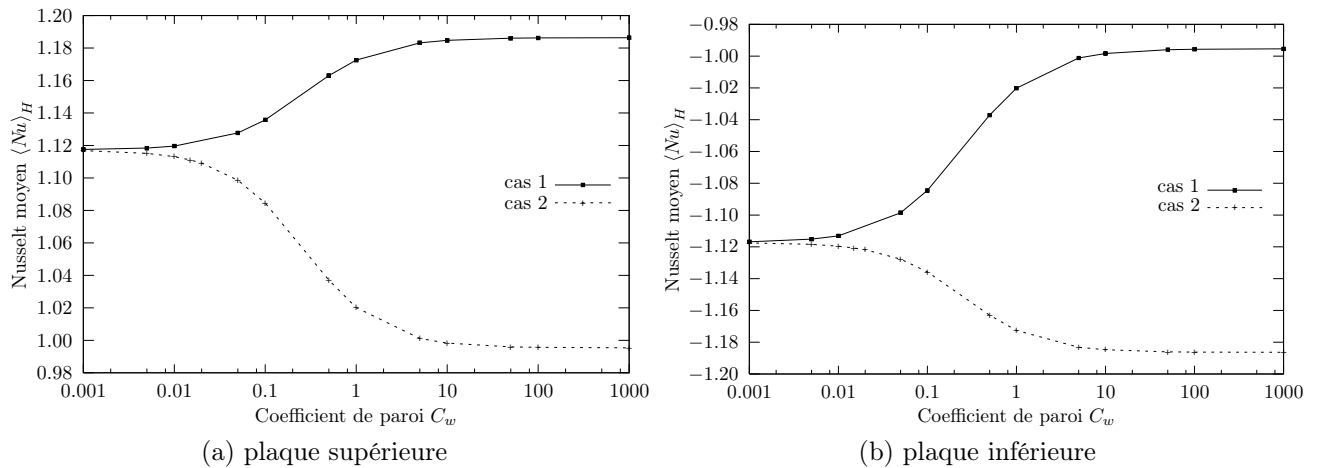


FIGURE 6.18 – Nombre de Nusselt horizontal moyen.

plaque inférieure le nombre de Nusselt du cas 1 évolue comme l'opposé de celui de la plaque supérieure dans le cas 2 et vice versa. Ceci est consistant avec les symétries respectées par l'écoulement pour le rapport d'aspect 2. En effet le champ de vitesse se retrouvent par une symétrie par rapport à l'axe horizontal et un passage à l'opposé suit d'une symétrie par rapport à l'axe verticale, cette dernière n'ayant pas d'effet sur le nombre de Nusselt. Enfin dans la limite parfaitement conductrice le nombre de Nusselt peut devenir plus petit que 1 en module pour l'une des deux plaques (suivant que l'on considère le cas 1 ou 2). Ceci s'explique par l'existence des deux rouleaux qui résulte en des échanges horizontaux non compensés entre les parois verticales. Dans le cas 1 l'inclinaison des isothermes sur les parois verticales indique que le flux thermique sont dirigés vers l'intérieur tandis que ceux-ci sont dirigés vers l'extérieur dans le cas 2. La conductivité infinie des parois rend le transport de chaleur plus favorable à



l'intérieur de celle-ci que dans la masse du fluide. L'évaluation du nombre de Nusselt ne tenant pas compte des échanges dans les parois latérales le transport convectif de chaleur semble être moins efficace que le transport conductif à l'état hydrostatique. Ce paradoxe est levé si on considère que c'est la convection qui crée les conditions favorables aux échanges avec les parois en inclinant les isothermes.

En conclusion l'application de l'algorithme de diagonalisation par blocs à un problème de thermique à permis de tester la convergence des solutions numériques en tenant compte de l'influence du schéma temporel. Le problème pr santant l'avantage d'être régulier il a été possible de vérifier le comportement spectral de la discrétisation spatiale sur les champs résolus ainsi que sur l'imposition de la contrainte de divergence nulle. La stabilité a été brièvement testée. La précision du code ne semble pas affectée par les conditions aux limites introduites comme le montre la finesse de l'évaluation des seuils de convection. Enfin l'étude de la convection a permis d'acquérir une meilleure compréhension des phénomènes décrits par une condition limite impliquant l'équilibre entre une dérivée première de type flux et une dérivée seconde de type diffusif. Ceci facilitera l'analyse des résultats lorsque ce type de condition sera appliqué sur la vitesse dans le cas d'un écoulement thermocapillaire.

# Quatrième partie

## Résultats



---

## CAVITÉ ENTRAÎNÉE

---

Lorsque deux parois solides formant un angle déplacent un fluide par leur mouvement relatif, la prise en compte du glissement du fluide sur celles-ci peu supprimer la singularité au point de jonction. L'étude analytique de Taylor [140], connue sous le nom de "problème du grattoir", montre le caractère non-physique du modèle avec adhérence car la singularité de vitesse donne lieu à une contrainte infinie sur les parois solides. Le cas de la ligne de contact mobile est fortement similaire au problème du grattoir. Bien que la paroi fixe soit remplacée par une interface fluide/fluide, dont le contour est une inconnue, la singularité de vitesse au voisinage du point triple est de même nature et se traduit aussi par une contrainte infinie sur le solide. Il semble donc naturel de s'inspirer des approches proposées pour la ligne de contact mobile et de les adapter au problème du grattoir.

La prise en compte d'un glissement dans l'étude de la ligne de contact mobile a d'abord été proposée par Huh et Scriven [77] et par Dussan et Davis [43]. Par la suite Dussan [42] a montré qu'un glissement modélisé par un profil de vitesse imposé peu être rapproché d'une condition mixte de Navier (voir chapitre 2) et lève l'indétermination de la vitesse au point triple. L'étude analytique de l'écoulement au voisinage du point triple pour un glissement de Navier, effectuée par Hocking [71], a montré que la vitesse reste singulière à la jonction mais conduit à une contrainte intégrable ; le force nécessaire pour déplacer le fluide est alors finie.

En raison des nombreux avantages qu'elle présente, la cavité entraînée sera utilisée pour expérimenter l'effet du glissement sur les singularités du couvercle. Les deux points de jonction du couvercle avec les parois verticales sont des grattoirs de Taylor pour un angle de  $\frac{\pi}{2}$  et une vitesse du mur mobile positive ou négative. Par ailleurs, cette configuration a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux, théoriques et numériques parmi lesquels on compte des calculs visant à servir de référence (Botella et Peyret [15]). Pour cette raison elle est souvent utilisée comme cas-test lors de la mise au point d'un nouveau code de calcul. Ceci nous permettra d'appréhender plus aisément l'effet du glissement sur les écoulements en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

## 7.1 Revue non-exhaustive des résultats de la cavité entr  n  

Les simulations numériques de la cavité entr  n  e furent d'abord réalisées pour le problème de Stokes, puis de Navier-Stokes pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 400, du fait de la puissance limitée des ordinateurs alors disponibles. L'un des premiers articles parvenant à mettre en évidence l'évolution spatiale du champ de vitesse, écrit par Burggraf [20] en 1966, repose sur une comparaison aussi bien qualitative que quantitative de développements analytiques et de calculs en différences finies pour  $Re \leq 400$ . La résolution précise des écoulements 2D sur une large gamme de Reynolds est longtemps rest  e un objectif majeur des études numériques. Une quinzaine d'années plus tard, en 1980, la dynamique est toujours mal connue : les résultats de Gupta [60] donnés à des valeurs de  $Re$  de 5000 présument faussement la disparition des cellules de recirculation avec l'augmentation du nombre de Reynolds, faute d'une résolution spatiale suffisante. Parallèlement, des comparaisons entre les écoulements 2D et 3D ont aussi été effectuées par Goda [54] afin de déterminer le caractère de l'écoulement réel.

Les principales difficultés rencontrées en simulation numérique proviennent du nombre croissant de points de discrétisation nécessaires pour bien représenter les structures de l'écoulement lorsque les effets inertiels s'intensifient, ainsi que de la présence des singularités du couvercle et de leur gestion. La présence d'une singularité rend le nombre de mailles nécessaire d'autant plus important qu'elle correspond à une échelle infiniment petite.

Les temps de calculs prohibitifs résultants de grands nombres de mailles furent à l'origine du développement de méthodes de résolution numérique plus efficaces. Le développement d'un algorithme multigrille en différences finies a permis à Ghia *et al.* [53] de représenter les   tats stationnaires jusqu'à Reynolds 10000 avec des maillages d'au plus  $257 \times 257$  nœuds. Ces résultats sont encore cités en références dans des revues récentes, comme celle de Shankar et Deshpande [130]. Les travaux de Shen [132, 131], Batoul *et al.* [10], sont parmi les premiers à situer précisément les seuils de transition vers les   tats périodiques ce qui nécessite non-seulement une bonne résolution spatiale mais aussi de bien représenter l'évolution temporelle des écoulements. L'utilisation des méthodes spectrales donne accès à une grande précision tout en conservant des maillages modérés (de l'ordre de  $80 \times 80$  pour la cavité entr  n  e). La complexité des opérateurs spectraux de dérivation est compensée par l'emploi d'algorithmes élaborés comme les diagonalisations successives développées par Haldenwang *et al.* [63] (voir chapitre 4) qui a permis de localiser précisément la position du seuil d'instationnarité.

Toutefois, les méthodes spectrales nécessitent une gestion explicite des singularités. Des méthodes basées sur une formulation faible (volumes finis, éléments finis) peuvent résoudre les problèmes mal posés car elles introduisent un filtrage implicite des discontinuités dépendant du maillage choisi. Les différences finies, bien qu'introduisant elles aussi un filtrage implicite par leur caractère diffusif, sont aussi affectées par les discontinuités. Dans certains cas ce filtrage peu se révéler insuffisant et les solutions peuvent être sujettes au phénomène de Gibbs (voir par exemple l'article de Gatski *et al.* [50]). Pour éviter les oscillations engendrées par les discontinuités du couvercle, la condition limite est souvent filtrée par une fonction polyn  -

miale régulière (voir par exemple section 3.1). Ceci rétablit la convergence exponentielle des méthodes spectrales. La longueur de filtrage est imposée par le choix du degré du polynôme de régularisation. Le problème singulier est d'autant mieux approché que la longueur de filtrage est petite, c'est-à-dire le degré du polynôme élevé. Certains auteurs ont cherché à remédier au problème en s'appuyant sur les solutions asymptotiques décrites dans Moffatt [104], Hancock *et al.* [64], Gupta *et al.* [61], Floryan et Czechowski [47]. La procédure consiste alors à soustraire la partie singulière connue et à ne calculer que la partie régulière de la solution perturbée par la partie singulière (Schultz *et al.* [126], Botella et Peyret [15], Botella [16], Auteri et Quartapelle [7], Botella et Peyret [14], Auteri *et al.* [5, 6]). Les solutions obtenues sont alors données comme solutions de références utiles à la validation de nouveaux codes. Dans une discussion sur la nature de la singularité de la solution asymptotique, Störckuhl *et al.* [139] proposent la prise en compte de fuites aux jonctions paroi/couvercle. Hansen et Kelmanson [65] calculent une solution asymptotique perturbée par la présence du canal et comparent celle-ci à des calculs numériques.

Des simulations en dynamique moléculaire étudient le comportement du fluide au voisinage de la jonction. L'objectif est de fournir un modèle macroscopique levant la singularité et tenant compte d'effets très locaux. Ces études ont mis en évidence l'existence d'un glissement (c.f. chapitre 2), la possibilité de comportements non-newtonien, ainsi que l'existence de fuites à l'échelle moléculaire (Koplik et Banavar [91, 92, 90]). Qian et Wang [119] ont effectué des comparaisons entre écoulements de cavité entraînée, soit calculés par la dynamique moléculaire, soit calculés par intégration des équations de Navier-Stokes avec prise en compte d'une condition de Navier. Bien qu'un bon accord ait été observé, l'évolution de la contrainte comme inverse de la distance au coin semble indiquer que la singularité est toujours présente. Nie *et al.* [108] ont utilisé une méthode hybride permettant le calcul de l'écoulement près des coins par la dynamique moléculaire et le modèle de milieu continu dans le reste du domaine. Cette méthode permet de coupler les effets des petites échelles et des grandes échelles sans introduire d'hypothèse *a priori* sur la dynamique proche de la jonction. L'écoulement est régularisé, du glissement apparaît sur tout le couvercle. La loi de variation en inverse de la distance au coin est retrouvée mais mise en défaut très proche du coin.

Dans ce qui suit, la régularité des écoulements sera mise en question pour différents modèles de glissement basés sur la condition de Navier. Les structures présentes dans les écoulements et les valeurs de  $Re$  pour les seuils de transitions vers l'état instationnaire en présence du glissement seront comparés aux résultats dans le cas du filtrage. Ceci apportera une compréhension du couplage entre glissement et hydrodynamique, qui sera utile pour l'étude des écoulements thermocapillaires (chapitre 8).

## 7.2 Régularisation

Afin de servir de référence aux résultats obtenus par l'introduction du glissement, un certain nombre de caractéristiques de la cavité entraînée régularisée (comme introduite en section 3.1) est présenté dans cette section.

L'emploi du polynôme de filtrage  $f_n(x) = (1 - (2x)^{2n})^2$  conduit à un profil de vitesse imposé le long du couvercle représenté sur la figure 7.1. Celui-ci a été choisi de manière à ce que les courbes arrivent dans les coins avec une tangente horizontale, ce qui assure la compatibilité des conditions aux-limites avec la contrainte de divergence nulle. Lorsque  $n$  augmente, un plateau pour lequel la vitesse est quasiment constante et égale à 1, se développe au centre du couvercle. Dans la limite où  $n$  tend vers l'infini,  $\{f_n\}$  tend vers la fonction créneau. La droite  $y = 0,95$ , permet de visualiser les longueurs de filtrage définies comme l'intersection des graphes des polynômes avec celle-ci.

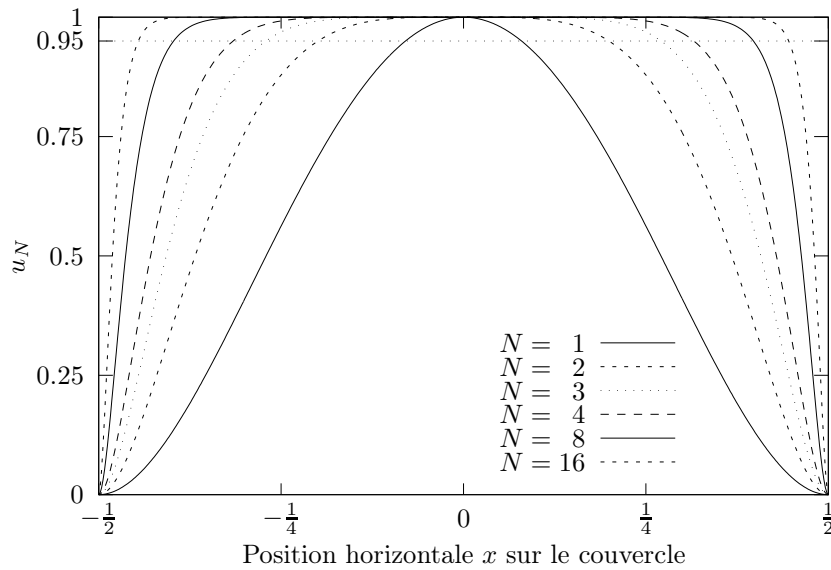


FIGURE 7.1 – Polynômes de régularisation et longueurs de filtrages.

La longueur de filtrage est donnée par  $\delta x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt[2n]{1 - \sqrt{0,95}}$ . Le tableau 7.1 présente les valeurs de  $\delta x$  correspondant à la figure 7.1.

$n$	1	2	3	4	8	16
$\delta x$	0,42	0,30	0,23	0,18	0,10	0,05

TABLE 7.1 – Longueurs de filtrage.

### 7.2.1 Comportement de la divergence

En premier lieu, l'analyse des résultats portera sur la présence ou l'absence de singularité dans l'écoulement obtenu. Suivant la discussion de la section 4.1.2, la divergence de la vitesse étant une grandeur sensible aux singularités, celle-ci sera utilisée pour les détecter. La régularité de la cavité entr  n   associée au filtrage polynômial proposé étant bien établie, la connaissance du comportement de la divergence dans ce cas servira de référence à l'interprétation des résultats

pour la prise en compte du glissement. L'évolution de la divergence relative, reportée en échelle logarithme, en fonction du nombre de modes de Chebyshev est représentée sur la figure 7.2, pour différents polynômes de régularisation :  $n = \{1, 2, 3, 4, 8, 16\}$ . Les calculs sont effectués à un nombre de Reynolds de 1500 où l'écoulement est stationnaire selon le critère donné au chapitre 5 (équ. (6.2.1) page 104). Le pas de temps est fixé égal à  $10^{-3}$ . Tout autre paramètre étant fixé, il a été montré au chapitre 5 que celui-ci n'influe pas sur le comportement général de la divergence (voir figure 6.8 page 110). Toutes les courbes décroissent lorsque le nombre de modes augmente et possèdent une zone de décroissance exponentielle. À maillage fixé, la divergence est d'autant plus faible que le paramètre  $n$  est petit. Lorsque  $n$  est grand la longueur de filtrage devient très petite ce qui se traduit par une variation rapide du profil de vitesse le long du couvercle au voisinage des coins. Pour un maillage donné, les gradients de vitesse seront mieux capturés pour de faibles valeurs de  $n$ , car la vitesse s'annule sur une distance plus importante, ce qui explique la position relative des différentes courbes. Chaque courbe associée à une valeur de  $n$  possède un ou deux pics interrompant la décroissance exponentielle. Ces pics sont couramment observés sur tous types de configurations. Ils pourraient être associés à la prise en compte de petites structures de l'écoulement ce qui expliquerait leur apparition successive pour une régularisation donnée et le fait qu'ils se déplacent vers les grands nombres de modes lorsque l'échelle de filtrage diminue.

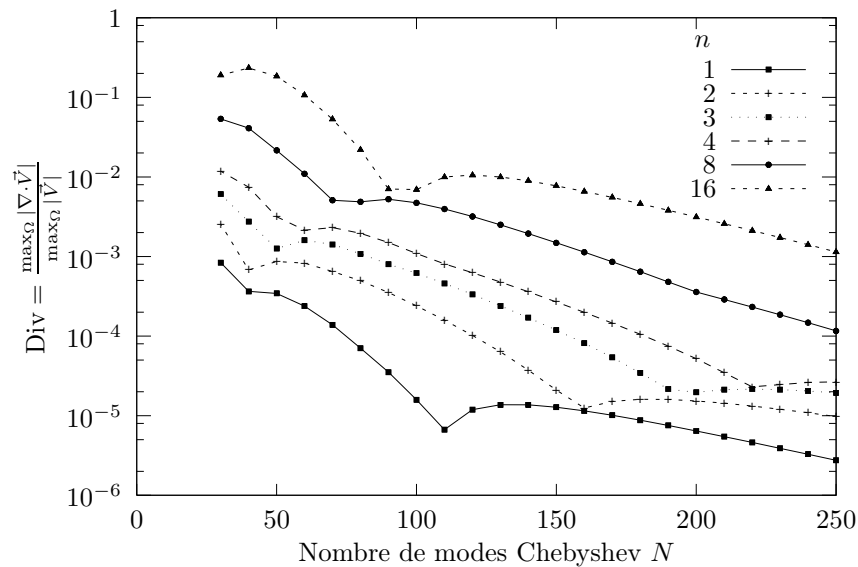


FIGURE 7.2 – Évolution de la divergence,  $Re = 1500$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

### 7.2.2 Topologie des écoulements régularisés à Reynolds 1500

La topologie des écoulements régularisés est maintenant rapidement présentée pour les filtres le plus fort ( $n = 1$ ) et le plus faible ( $n = 16$ ) et un nombre de Reynolds fixé à 1500. Ceci permet d'observer l'influence de la régularisation sur les solutions à un nombre de Rey-



nolds pour lequel les principales zones de recirculations sont apparues. Les figures 7.3 et 7.4 représentent les lignes de courant et de vorticité pour ces deux régularisations. Le pas de temps choisi,  $\delta t = 10^{-3}$ , assure une bonne résolution temporelle des écoulements, Batoul *et al.* [10] ayant utilisé des pas de temps variant de  $10^{-2}$  à  $5.10^{-3}$ .

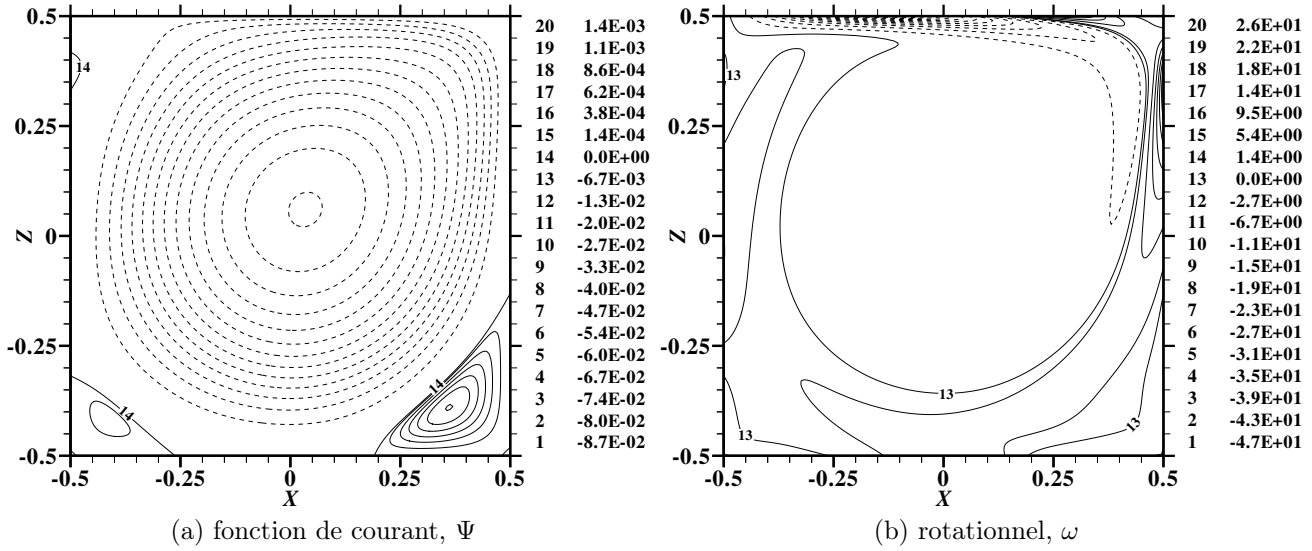


FIGURE 7.3 – Régularisation  $n = 1$ , pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ .

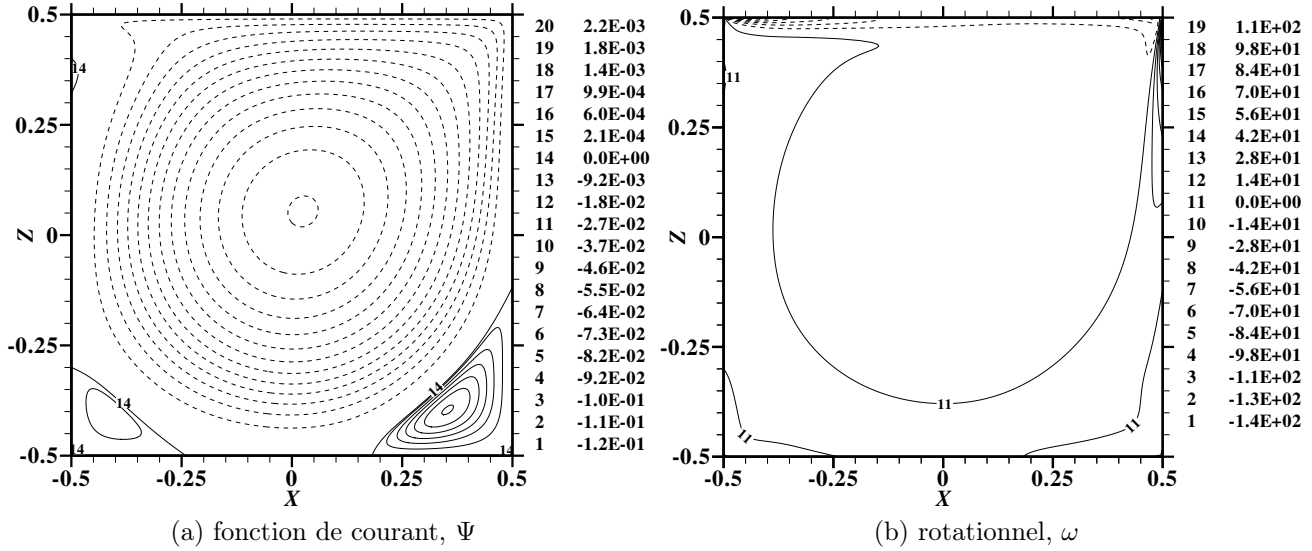


FIGURE 7.4 – Régularisation  $n = 16$ , pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ .

Les données servant au tracé étant les mêmes que celles de l'étude de la divergence, une large gamme de maillages de  $30 \times 30$  à  $250 \times 250$  sont disponibles. Un nombre de  $170 \times 170$  modes est retenu car il assure une bonne résolution spatiale de toutes les structures de l'écoulement.

Les fonctions de courant, dont les contours sont représentés par les figures 7.3a et 7.4a, sont fortement similaires. Elles possèdent une structure principale, résultant directement du cisaillement du couvercle, dans laquelle le fluide est en mouvement circulaire dans le sens négatif son centre étant légèrement décalé vers le haut et vers la droite par rapport au centre du domaine. Les solutions possèdent aussi deux cellules de recirculation dans les angles inférieurs de la cavité, à l'intérieur desquelles le mouvement s'effectue dans le sens contraire de la cellule principale. Selon Moffatt, ces deux cellules sont accompagnées d'une infinité de recirculations plus petites au fur et à mesure que l'on se rapproche du coin. Le centre de ces cellules se situe sur la bissectrice de l'angle, l'amplitude de la fonction de courant à cet endroit va décroissant selon une suite géométrique. Ces structures autosimilaires sont souvent appelées tourbillons de Moffatt en référence à la description qu'il en donne dans son étude analytique [104]. Ici seul les premiers tourbillons de Moffatt apparaissent dans notre solution car la représentation d'un grand nombre de ces structures nécessite des maillages resserrés à l'extrême (voir figures 7.5a et 7.6a). Enfin une troisième cellule de recirculation existe près du coin supérieur gauche du côté

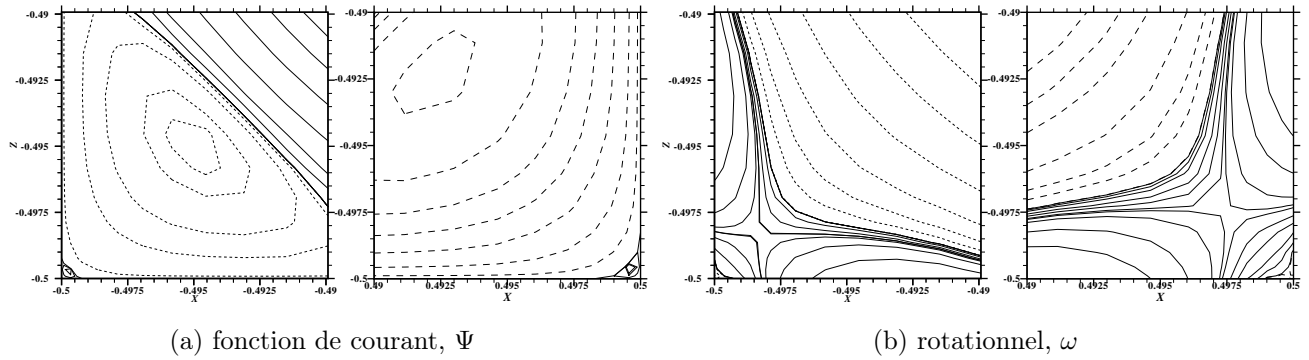


FIGURE 7.5 – Régularisation  $n = 1$ , pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ , coins inférieurs.

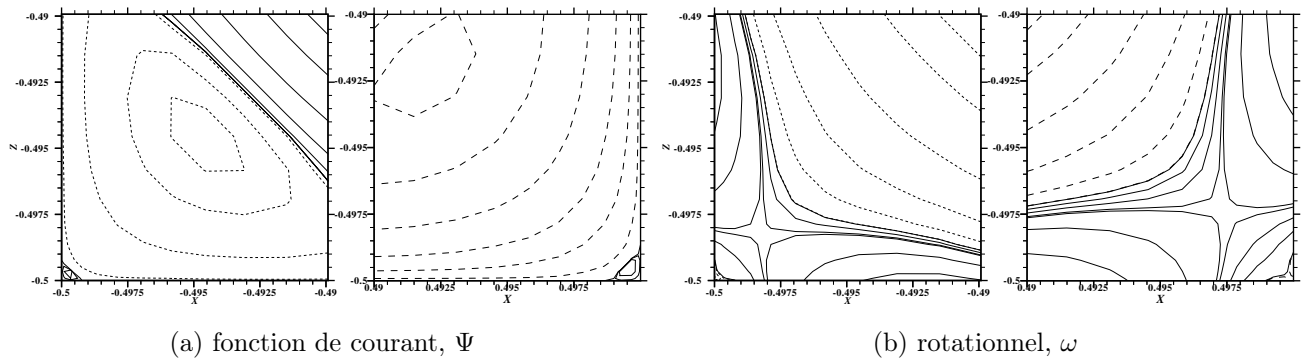


FIGURE 7.6 – Régularisation  $n = 16$ , pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ , coins inférieurs.

de l'extrémité incidente du couvercle. Cette dernière se distingue des deux précédentes car elle ne peut se développer au contact du couvercle. Le profil de vitesse imposé le long du couvercle

la contrainte à s'attacher sur la paroi verticale légèrement en dessous du couvercle de manière à permettre aux particules fluides situées sur la partie externe de la cellule principale d'atteindre la jonction paroi/couvercle. Il y a peu de différences entre les lignes de courant correspondant à  $n = 1$  (figure 7.3a) et celles correspondant à  $n = 16$  (figure 7.4a). Elles possèdent rigoureusement la même topologie à la différence que les extrema de la fonction de courant sont plus élevés dans le cas  $n = 16$  que dans l'autre. Ceci provient directement du profil de vitesse imposé qui fournira d'autant plus d'énergie cinétique que le filtrage sera faible, c'est-à-dire que le polynôme de régularisation sera proche de la fonction créneau ( $f_{n \rightarrow \infty}$ ).

Les iso-contours de la vorticité, sont représentés sur les figures 7.3b et 7.4b. Quel que soit le degré du polynôme de régularisation, le cisaillement est surtout important pr  s des parois où s'effectuent principalement les transferts par viscosité, ce qui indique l'existence d'une couche limite. Le contour correspondant à une valeur de vorticité nulle délimite une zone centrale, correspondant à la cellule principale de l'écoulement, dans laquelle le cisaillement est quasiment uniformément nul : le fluide y est en rotation solide. Ce contour met aussi en évidence le caractère moteur ou dissipatif des échanges visqueux du fluide avec les parois qui est caractérisé par le signe de la vorticité relativement au sens de circulation. Ici, à l'intérieur de la zone de vorticité négative, la vitesse du fluide est inférieure à celle de la paroi : le fluide est entraîné par la paroi ; tandis que dans la zone de vorticité positive, la vitesse du fluide est supérieure à celle de la paroi : le fluide est freiné par la paroi. Les valeurs négatives de cisaillement s'étendent principalement depuis le couvercle jusqu'au contour de vorticité nulle. Les valeurs de vorticité positives se situent, elles, le long des parois verticales et du fond de la cavité. Il existe dans les coins inférieurs de la cavité une alternance de zones négatives et positives de vorticité qui sont liées à l'existence des tourbillons de Moffatt (voir figures 7.5b et 7.6b). Leur présence est due au gradient de pression assurant le changement de direction de l'écoulement à ces endroits. La différence majeure entre les solutions obtenues pour  $n = 1$  et  $n = 16$ , se situent le long du couvercle. Pour un filtrage fort,  $n = 1$ , la zone de vorticité négative ne s'étend pas sur toute la longueur du domaine. En effet, elle se termine à une distance environ  $\frac{L}{4}$  du coin droit (fig. 7.4b). Dans le cas d'un filtrage faible,  $n = 16$ , celle-ci s'étend au contraire sur tout le couvercle, le contour de vorticité nulle naissant aux jonctions parois/couvercle. Ceci provient du polynôme de régularisation. Pour les  $n$  petits celui-ci vaut 1 sur une zone restreinte au centre du couvercle.   l'intérieur de cette zone le fluide est accéléré. Au delà de cette espace la vitesse imposée devient moins importante, toutefois les couches de fluides qui ne sont pas directement en contact avec le couvercle ont, elles aussi, été accélérées dans la zone de vitesse importante. Sous l'effet de leur inertie, ces dernières conservent une vitesse importante qui peut être supérieure à celle imposée par le couvercle lorsque ceci se produit loin des parois verticales. Pour  $n = 1$  la zone d'accélération est d'extension trop limitée pour que le fluide sente la présence des parois verticales, ce qui explique le changement de signe de la vorticité près du coin droit. Au contraire, pour  $n = 16$ , l'influence des parois verticales sur les couches internes est suffisante pour contrecarrer les effets inertiels : la zone de décélération est très voisine de la paroi verticale. Il est possible de se faire une idée approximative de l'épaisseur de la couche limite le long du couvercle et de la paroi de droite en considérant que le nombre de contours d'iso-vorticité visibles près du coin supérieur gauche, entre le couvercle et le contour

nul, ainsi que le nombre de contours près du coin supérieur droit, entre la paroi verticale de droite et le contour nul, doivent être important dans les couches limites respectives, car c'est à cet endroit que la vitesse devrait varier le plus. Il apparaît alors que la couche limite est plus fine dans le cas  $n = 16$ , probablement parce que la plus grande injection d'énergie induit un écrasement de la couche limite.

### 7.2.3 Les seuils d'instationnarité

Les seuils de transition de l'état stationnaire vers l'état périodique ont été localisés pour  $n = 1, 2, 3, 4, 8$  et  $16$ . Ces résultats sont résumés dans le tableau 7.2. Le code utilisé est une version mise à jour de celui mis au point par Batoul *et al.* [10]. L'intérêt de ce tableau est d'avoir été obtenu pour un pas de temps plus petit et un maillage plus fin que lors de l'étude précédente [10]. Il regroupe, pour chaque  $n$ , les valeurs des Reynolds critiques ( $Re_c$ ) encadrés au plus à 5% près, les valeurs des pulsations adimensionnelles pour un Reynolds égal à la borne supérieure de l'encadrement, les vitesses effectives, et le maximum de la divergence relative en un point du domaine. La vitesse effective est définie comme la valeur moyenne de la vitesse le long du couvercle<sup>(1)</sup> :  $\int_{-1/2}^{+1/2} u(x, \frac{A_L}{2}) dx = \frac{8n^2}{1+6n+8n^2}$ . Les nombres de Reynolds vérifient alors la relation :  $< Re > = Re_{eff}$ .

En première lecture, le seuil de transition converge vers  $Re_c = 8000$  avec la diminution du filtrage et la pulsation adimensionnelle de la solution périodique vers 2,2. Ces résultats sont en accord avec ceux de Fortin *et al.* [48] qui donnent la valeur  $Re_c = 8000$  en éléments finis sans filtrage explicite et ceux de Auteri *et al.* [5] qui donnent l'encadrement ]8017, 6; 8018, 8] avec une méthode de soustraction de la singularité. Pour  $n = 1$  le même encadrement que Shen [131] est retrouvé ]10100, 10500]. Ce dernier utilise une méthode tout à fait similaire à celle de cette thèse.

$n$	$N_x \times N_z$	$\delta t$	$Re_c$	$\omega$	$v_{eff}$	$< Re_c >$	$\max_{\Omega}  \vec{\nabla} \cdot \vec{V}  / \max_{\Omega}  \vec{V} $
1	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]10100, 10500]	3,0330403	$\frac{8}{15}$	]5387, 5600]	$2,01 \cdot 10^{-4}$
2	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]8800, 8900]	2,5626685	$\frac{32}{45}$	]6258, 6329]	$8,16 \cdot 10^{-4}$
3	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]8400, 8500]	2,4286324	$\frac{72}{91}$	]6646, 6725]	$1,97 \cdot 10^{-3}$
4	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]8200, 8300]	2,3660644	$\frac{128}{153}$	]6860, 6944]	$3,70 \cdot 10^{-3}$
8	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]8000, 8100]	2,2821590	$\frac{512}{561}$	]7301, 7393]	$1,13 \cdot 10^{-2}$
16	$80 \times 80$	$10^{-3}$	]8000, 8050]	2,2459920	$\frac{2048}{2145}$	]7638, 7686]	$6,99 \cdot 10^{-2}$

TABLE 7.2 – Seuils d'instationnarité en régularisation.

Suivant les commentaires de Batoul *et al.* [10], il est plus pertinent de normaliser le nombre de Reynolds par la vitesse effective pour observer l'évolution des seuils de transition. De cette

1. Remarque :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2}{1+6n+8n^2} = 1$  ce qui correspond bien à la vitesse effective sans régularisation.

man  re,   Reynolds effectif ( $\langle Re \rangle$ )  gal, l'énergie cinétique provenant de l'entr  nement est la même quel que soit le polynôme de régularisation. En passant aux Reynolds effectifs, la nouvelle valeur du seuil se situe aux alentours de 7660.

En ce qui concerne la pulsation, les valeurs obtenues sont en bon accord ou du même ordre de grandeur que celles de la littérature : pour  $n = 1$  Batoul *et al.* [10] donnent  $\omega = 3,03$ , Fortin *et al.* [48] en utilisant des éléments finis et une régularisation donnent  $\omega = 2,0802$ . Pour des conditions aux limites singulières, à comparer avec  $n = 16$  dans le tableau 7.2, Fortin *et al.* [48] obtiennent  $\omega = 2,83786$ , tandis qu'Auteri *et al.* [5] obtiennent  $\omega = 2,8381$  par leur méthode de soustraction de la singularité.

### 7.3 Condition de Navier

Un glissement du type Navier (voir section 3.1.3) est maintenant introduit sur toutes les parois de la cavité. Le caractère régulier ou singulier des solutions calculées est mis en évidence par la figure 7.7 qui représente l'évolution de maximum de la divergence avec le nombre de points du maillage. Plusieurs valeurs du paramètre de glissement  $l_s$  sont utilisées :  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ .

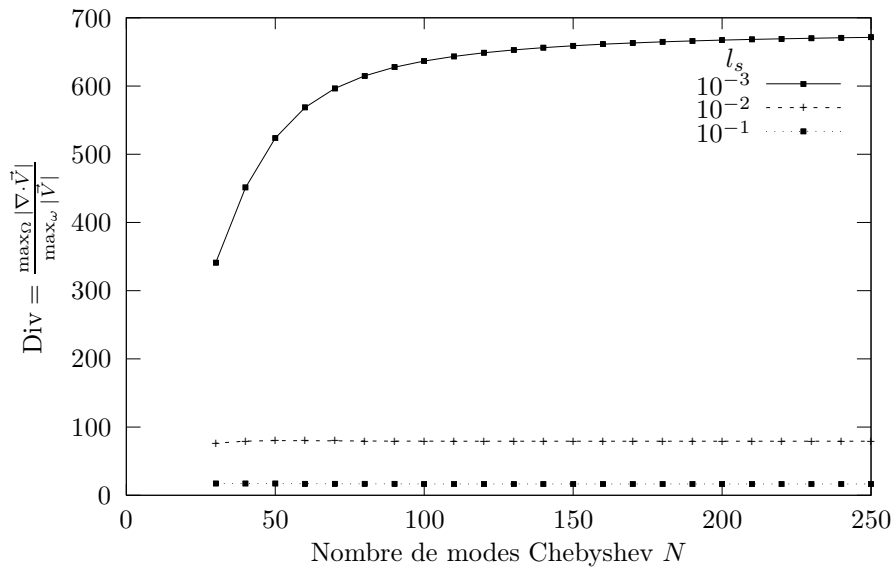


FIGURE 7.7 –  volution de la divergence avec le maillage pour  $l_s = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ .

Il apparaît immédiatement que la divergence ne décroît pas avec le maillage mais converge vers une valeur donnée quelle que soit l'ordre de grandeur du paramètre de glissement  $l_s$ . Plus le paramètre de glissement est petit et plus la valeur limite de la divergence est importante.

Ceci est révélateur de la présence d'une singularité et montre qu'un glissement de Navier ne suffit pas à régulariser les problèmes du type grattoir de Taylor, ce qui est consistant avec l'article de Hansen et Kelmanson [65]. Ce dernier montre que le glissement rend la singularité intégrable mais ne la supprime pas.

Une analyse détaillée des conditions aux limites de la composante verticale de la vitesse au voisinage d'une jonction paroi/couvercle permet de comprendre l'origine de la singularité. La paroi verticale est imperméable au fluide et indéformable ce qui se traduit par  $u = 0$  et annule sa dérivée suivant  $z$  sur toute la longueur du mur :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Sur le couvercle, la vitesse horizontale vérifie la condition de Navier :

$$u + l_s \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

Si  $u$  s'annule à la jonction la condition du couvercle devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = l_s^{-1} \neq 0,$$

ce qui contredit la valeur nulle imposée par la rigidité et l'imperméabilité de la paroi verticale. Si la contradiction sur la vitesse horizontale est levée celle-ci est alors reportée sur la contrainte s'exerçant sur le couvercle. La singularité ne peut donc être levée par une condition de glissement de Navier usuelle. Il est intéressant de remarquer que la variation en  $\frac{1}{r}$  de la contrainte prévue par Taylor, où  $r$  est la distance à la jonction, est une caractéristique de la singularité et ne peut pas être vérifiée au plus près du coin si la singularité est levée, contrairement à ce que Qian et Wang [119] semblent affirmer.

En réexaminant la condition sur le couvercle et sa signification physique, il apparaît que la singularité est liée à la longueur de glissement. En variables dimensionnelles la condition de Navier s'écrit :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = k(V_0 - u).$$

La longueur de glissement est définie comme  $\frac{\mu}{k}$ . En supposant que la condition de Navier permette à  $u$  de s'annuler, il est nécessaire de modifier la condition pour permettre à la contrainte de cisaillement de s'annuler au voisinage de la jonction. Le fluide étant newtonien la viscosité dynamique  $\mu$  est fixée et ceci ne peut être obtenu qu'en permettant au coefficient de rappel  $k$  de s'annuler près des coins, ce qui revient à laisser la longueur de glissement varier le long du couvercle. En considérant que c'est l'existence d'une contrainte très importante à la jonction qui est à l'origine de cette variation, il est naturel d'envisager  $k$  comme une fonction de  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . En faisant alors tendre  $k$  vers 0 dans les coins la condition. Ceci est en accord avec les résultats de Thompson et Troian [141] qui ont obtenu une condition de Navier étendue (voir chapitre 1 page 30) par des simulations en dynamique moléculaire.

## 7.4 Glissement non uniforme

L'introduction d'une dépendance de  $k$  à la contrainte étant difficilement réalisable et mal connue, la variation du coefficient de rappel est imposée artificiellement comme une première

approximation. Lorsque la contrainte est suffisamment modérée, la longueur de glissement est une constante résultant des caractéristiques du fluide et de la surface solide. Celle-ci n'a donc aucune raison d'être ailleurs qu'aux jonctions couvercle/paroi. Pour en tenir compte,  $k$  est multiplié par une fonction régulière dont la valeur est comprise entre 0 (dans les coins) et 1 (loin de ceux-ci) :  $k(x) \leftarrow k g_n(x)$ .

Pour montrer que la régularité de la solution ne dépend pas de la manière dont le coefficient de rappel s'annule à la jonction deux types de variations sont introduites. La première est qualifiée de concave et correspond aux polynômes :

$$g_n^{cnv}(x) = 1 - (2x)^{2n}.$$

La deuxième désignée comme convexe est choisie pour vérifier  $k = \frac{\partial k}{\partial x} = 0$  en  $x = \pm \frac{1}{2}$  :

$$g_n^{cvx}(x) = (1 - (2x)^{2n})^2.$$

La condition de Navier étendue s'écrit alors :

$$\begin{aligned} g_n^{cnv}(x)u + l_s \frac{\partial u}{\partial z} &= g_n^{cnv}(x), \\ g_n^{cvx}(x)u + l_s \frac{\partial u}{\partial z} &= g_n^{cvx}(x). \end{aligned}$$

La valeur de  $n$  retenue est 4, les polynômes sont donc respectivement de degrés 8 et 16 dans les cas concave et convexe.

#### 7.4.1 Vitesse de convergence et régularité des solutions en concave et en convexe

Dans ce qui suit la convergence des solutions avec le maillage pour  $Re = 1500$  et un pas de temps  $\delta t = 10^{-4}$ , sont présentées, analysées et comparées entre elles pour les deux types de variation de  $k$  envisagées : concave ou convexe, lorsque le paramètre de glissement  $l_s$  vaut  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ , et  $10^{-4}$ .

Les figures 7.8a et 7.8b montrent l'évolution de la divergence avec le maillage. Dans chacun des cas la valeur maximale de la divergence relative est donnée en fonction du nombre de modes Chebyshev en échelle logarithmique sur les deux axes. Pour les deux types de variation la divergence décroît et tend vers zéro avec le maillage mais pas de manière exponentielle. La divergence vérifie une loi de puissance, donnée par :

$$\frac{\max_{\Omega} |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}|}{\max_{\Omega} |\vec{V}|} = a N^{-b},$$

excepté lorsque le paramètre de glissement  $l_s$  est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Ceci est dû à l'insuffisance du nombre de mailles utilisé qui ne permet pas de capturer une échelle de longueur (adimensionnelle) de cet ordre. Pour une grille de Gauss-Lobatto, la plus petite longueur capturée au

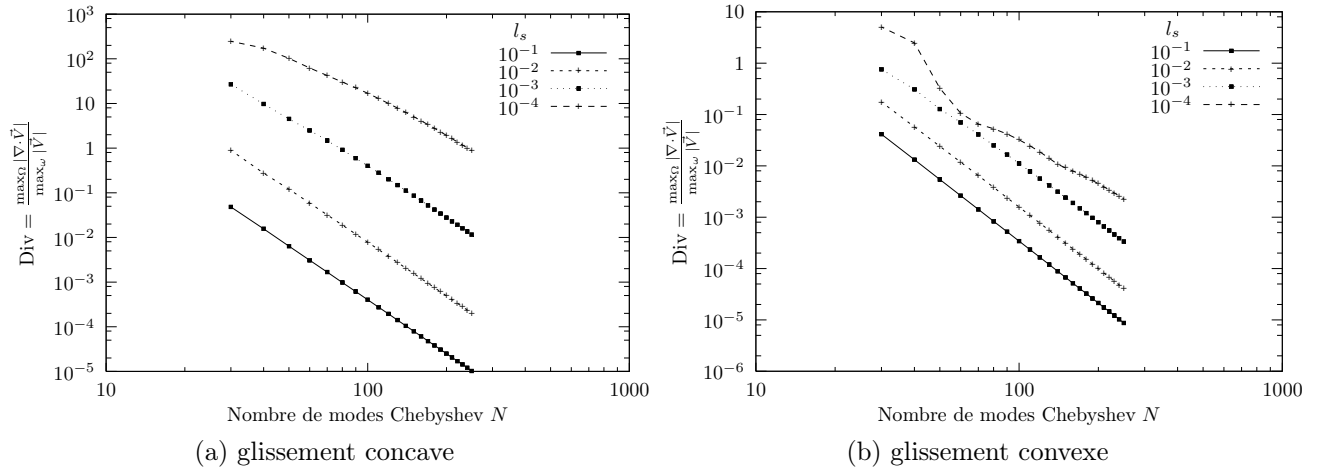


FIGURE 7.8 – Évolution de la divergence avec le maillage.

voisinage d'une paroi est donnée par  $1 - \cos(\frac{\pi}{N}) \simeq \frac{\pi^2}{2N^2} \simeq \frac{5}{N^2}$ , ce qui, pour le maillage le plus grand disponible donne environ  $7,9 \cdot 10^{-5}$ . Le premier maillage à donner une longueur inférieure à  $10^{-5}$  est  $N = 230$  pour lequel la petite échelle est  $9,3 \cdot 10^{-5}$ , ce qui ne laisse que trois maillages différents pour observer la loi de puissance lorsque  $l_s = 10^{-4}$ . Le coefficient directeur des différentes droites ne dépend ni du type de glissement ni de la valeur du paramètre de glissement. Dans les cas concave et convexe, la valeur initiale de la divergence (à  $N = 30$ ) est d'autant plus grande que  $l_s$  est petit. La divergence dépendant directement de la finesse de résolution des petites échelles, il n'est pas étonnant d'observer que les échelles induites par le modèle de glissement doivent être correctement représentées avant que la divergence n'atteigne une valeur raisonnablement faible.

Les coefficients de la loi de puissance ont été calculés par la fonction FIT de mathématique pour chacune des variations imposées de  $k$  lorsque  $l_s$  vaut  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 7.3 ainsi que le nombre de points utilisés pour effectuer la régression linéaire  $N_p$ . Les résultats mettent en évidence un taux de croissance égal à  $-4$  qui ne dépend

Coefficients de la loi de puissance : $\text{Div} = aN^{-b}$ pour les deux types de variation de $k(x)$						
concave : $g_4^{cnc}(x) = 1 - (2x)^{2 \times 4}$				concave : $g_n^{cnc}(x) = (1 - (2x)^{2 \times 4})^2$		
$l_s$	$a$	$b$	$N_p$	$a$	$b$	$N_p$
$10^{-1}$	$e^{10,6}$	3,99941	22	$e^{10,4}$	3,99549	22
$10^{-2}$	$e^{13,6}$	3,99800	12	$e^{11,9}$	3.99363	12
$10^{-3}$	$e^{17,3}$	3,93766	8	$e^{12,6}$	3.89333	8

TABLE 7.3 – Taux de décroissance de la divergence.

ni du type de variation utilisée (concave ou convexe) ni du paramètre de glissement. Pour tenir compte des petites échelles spatiales introduites par les conditions de Navier, le nombre de



points utilisé doit être réduit lorsque  $l_s$  diminue. Ceci permet de ne prendre en compte que la partie bien résolue pour effectuer la régression linéaire.

Les figures 7.9a et 7.9b, 7.10a et 7.10b, 7.11a et 7.11b, représentent respectivement l'évolution du maximum d'écart relatif au champ de référence ( $250 \times 250$  de la fonction de courant  $\Psi$ , du rotationnel de la vitesse  $\omega$  et de l'énergie cinétique dans les cas concave et convexe pour  $l_s = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . Les grandeurs choisies sont des valeurs globales de l'écoulement et sont moyenn es en norme  $L2$  (voir chapitre 5 page 105) avant de passer aux écarts relatifs.

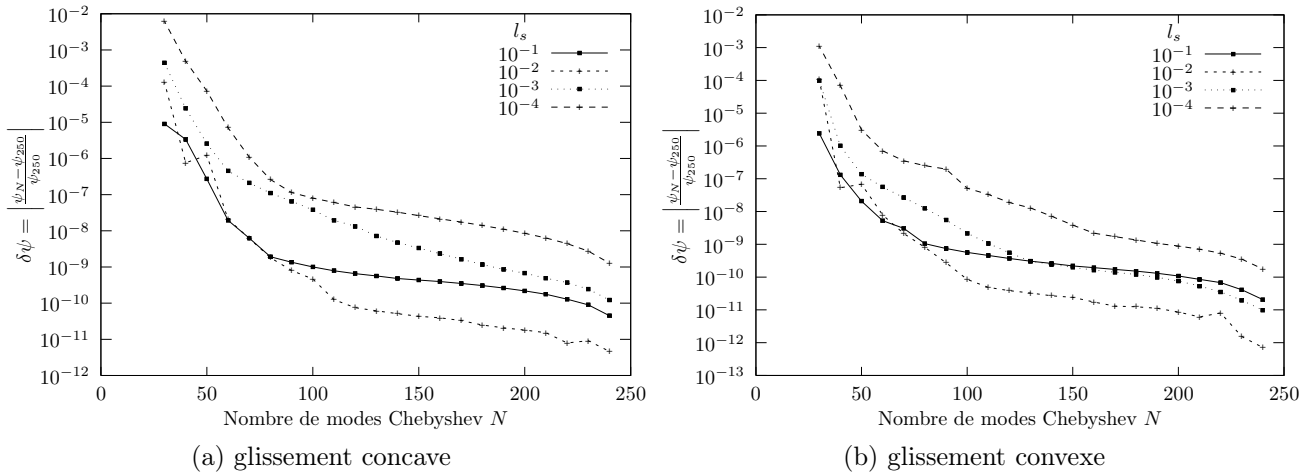


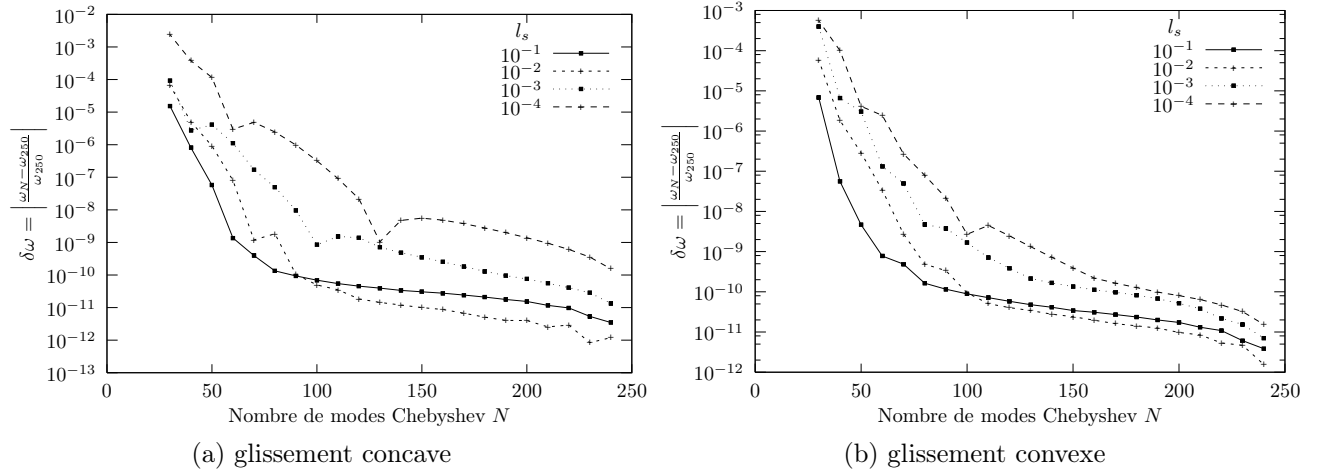
FIGURE 7.9 – Fonction de courant  $\Psi$  :  cart relatif à la solution de référence.

La figure 7.9 montre que la fonction de courant décroît pour les deux types de variations. Il semble aussi exister une zone de décroissance exponentielle de pente très faible, caractérisée par un profil linéaire l'échelle étant logarithmique pour l'erreur et linéaire pour le nombre de modes. Dans le cas de la variation concave, l'écart relatif à la solution de référence est d'autant plus faible que le paramètre de glissement  $l_s$  est grand, excepté pour  $l_s = 10^{-1}$  dont la courbe se situe au dessus de  $l_s = 10^{-2}$ . Dans le cas de la variation convexe un comportement similaire est observé mais la courbe correspondant à  $l_s = 10^{-1}$  passe aussi au dessus de celle correspondant à  $l_s = 10^{-3}$ .   paramètre de glissement  $l_s$  égal le profil concave du coefficient de rappel  $k(x)$ , conduit à des valeurs plus élevées d'écart relatif bien que le degré polynômial soit plus faible.

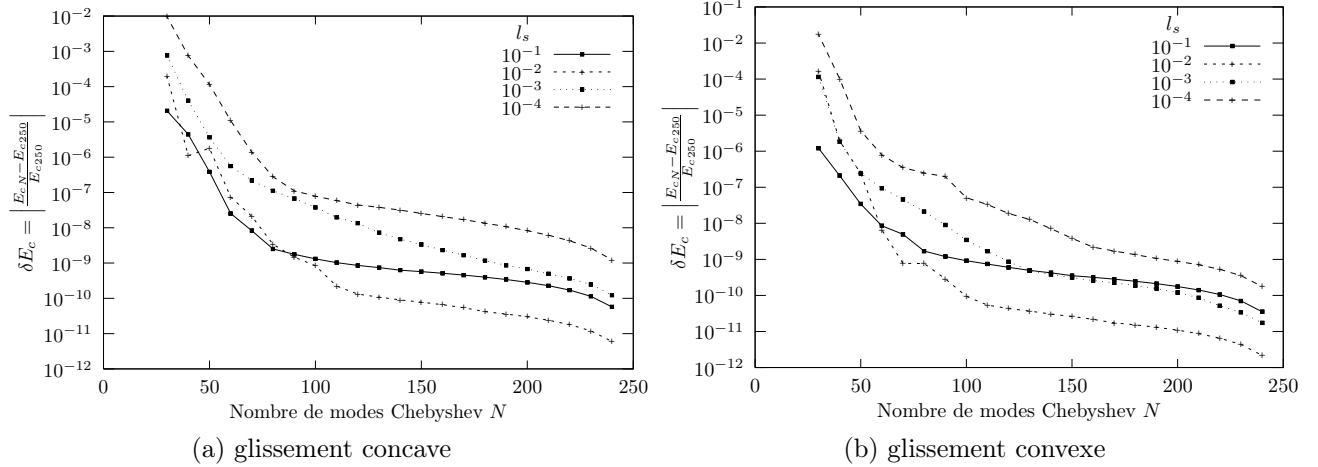
Le comportement du rotationnel de la vitesse, représenté sur la figure 7.10 est tout à fait semblable à celui rapport  pour la fonction de courant. Les courbes associées à  $l_s = 10^{-4}$  et  $l_s = 10^{-3}$  possèdent respectivement un et deux pics qui peuvent être attribués à l'existence de petites échelles comme celles présentes dans les cellules de recirculation.

L'énergie cinétique en figure 7.11 possède pour sa part un comportement quasiment identique à la fonction de courant, les commentaires de la figure 7.9 s'appliquant pareillement ici.

Au regard du comportement de la divergence, décrit précédemment, l'observation d'une décroissance exponentielle pour les grandeurs globales semble paradoxale. En effet la variation de la divergence comme une puissance négative du nombre de modes semble indiquer une singularité sur la dérivée d'ordre 5 de la divergence, c'est-à-dire sur une dérivée d'ordre 6 de

FIGURE 7.10 – Rotationnel de la vitesse  $\omega$  : écart relatif à la solution de référence.

la vitesse, alors que la décroissance exponentielle indique une solution infiniment dérivable. D'autre part les croisements observés dans les courbes des grandeurs globales sont l'indice d'une dépendance complexe de la dynamique au paramètre de glissement.

FIGURE 7.11 – Énergie cinétique  $E_c$  : écart relatif à la solution de référence.

En résumé, le type de profil choisi pour  $k$  bien qu'arbitraire ne semble pas avoir en lui-même d'influence sur la régularité de la solution ni même sur la dynamique. Dans les deux cas, la même puissance est obtenue pour la décroissance de la divergence. Les grandeurs globales de l'écoulement (fonction de courant, rotationnel et énergie cinétique) partagent les mêmes propriétés de convergence spectrale. Le problème est donc rendu plus régulier par l'utilisation des conditions de Navier étendues.

### 7.4.2 Topologie des écoulements à $Re = 1500$

La régularité des solutions ayant été étudiée, les caractéristiques topologiques des écoulements pour des conditions de Navier étendues sont ici commentées. La valeur du nombre de Reynolds est prise égale à 1500 pour permettre les comparaisons avec les calculs effectués en régularisation polynômiale. Le pas de temps  $\delta t$  utilisé est ici de  $10^{-4}$  alors qu'il est de  $10^{-3}$  dans le cas régularisé. Ceci est une conséquence de l'utilisation de la méthode de résolution itérative autorisant la prise en compte des conditions de glissement de Navier étendues (conditions de Robin non uniformes, voir section 4.2.2), qui nécessite de baisser le pas de temps pour améliorer la vitesse de convergence lors de l'inversion du problème de Helmholtz.

#### 7.4.2.1 Profils de vitesse et comparaison concave/convexe

Une des propriétés les plus caractéristiques du glissement réside dans les profils de vitesse le long des parois. Dans le cas de conditions d'adhérence régularisées le profil de vitesse le long du couvercle est imposé par le filtrage et la vitesse est nulle le long des autres parois. Au contraire, pour les conditions de Navier étendues le profil de vitesse s'adapte à l'écoulement pour vérifier bilan des contraintes pariétales. Ceci est mis en évidence par les profils des composantes de la vitesse tangente le long de chaque paroi. Ceux-ci sont représentés en figure 7.12, 7.13, 7.14 et 7.15 correspondant respectivement au couvercle, au fond, à la paroi de gauche et à celle de droite.

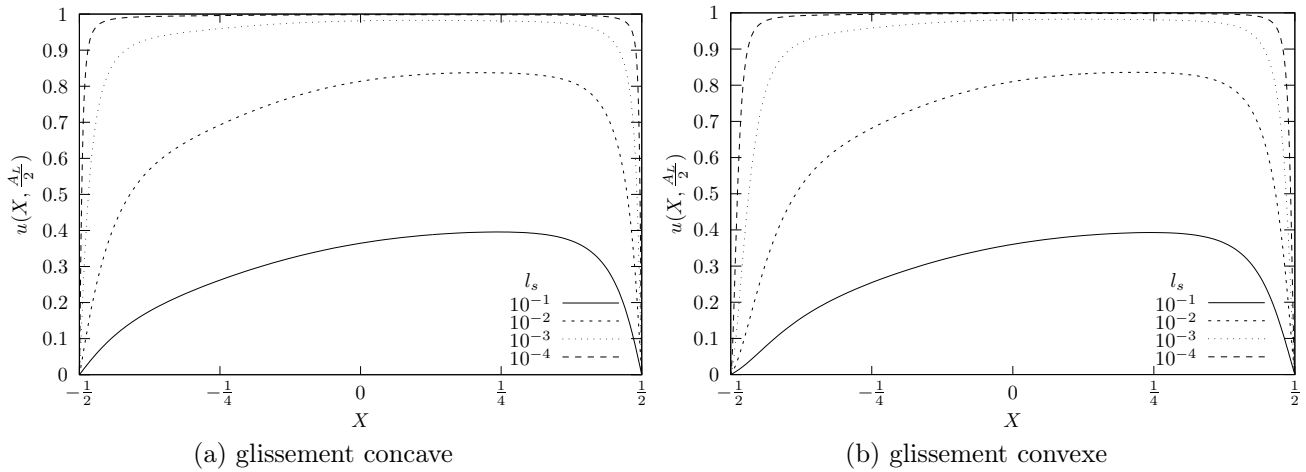


FIGURE 7.12 – Profils de vitesse sur le couvercle,  $z = +1/2$ .

Les figures 7.12a et 7.12b se rapportent respectivement aux profils de vitesse horizontales le long du couvercle dans le cas d'une variation concave et convexe de  $k$  pour quatre valeurs du paramètre de glissement  $l_s$ . Quel que soit le type de variation de  $k$  et aux mêmes valeurs de  $l_s$ , les différentes courbes se ressemblent fortement. Comme pour la régularisation les courbes aux différentes valeurs de  $l_s$  ne se croisent pas, ceci aussi bien en concave qu'en convexe. La

principale différence avec les profils induits par la régularisation (voir fig. 7.1) tient dans la vitesse maximale atteinte qui est inférieure à 1. Pour  $l_s = 10^{-1}$  cette caractéristique est très affirmée : le maximum de vitesse horizontale est de l'ordre de 0,4. Plus la longueur de glissement diminue plus le maximum de vitesse augmente et est très voisin de 1 lorsque  $l_s = 10^{-4}$ . La seconde différence est la perte de symétrie par rapport à l'abscisse,  $x = 0$ , des profils de vitesse. Dans le cas régularisé, cette symétrie est imposée par le filtre lui-même. Avec la condition de Navier étendue, les effets inertiels, sensibles pour  $Re = 1500$ , produisent un décalage du maximum de vitesse dans le sens de l'écoulement. Toutes les courbes font un angle différent de zéro dans les coins, alors que le polynôme de régularisation est choisi pour avoir une tangente horizontale. Enfin, la différence entre les cas concave et convexe est à peine visible. Elle est surtout apparente près du coin incident où l'on peut distinguer le changement de signe de la courbure associée à la variation convexe de  $k$ , tandis que dans le cas concave la courbure du profil de vitesse garde le même signe sur tout le couvercle. Le comportement plus brutal des profils au voisinage des coins, dans le cas concave, se traduit aussi par une vitesse maximum légèrement plus élevée que dans le cas convexe, à paramètres de glissement  $l_s$  égaux car l'énergie injectée dans la cavité est alors plus importante.

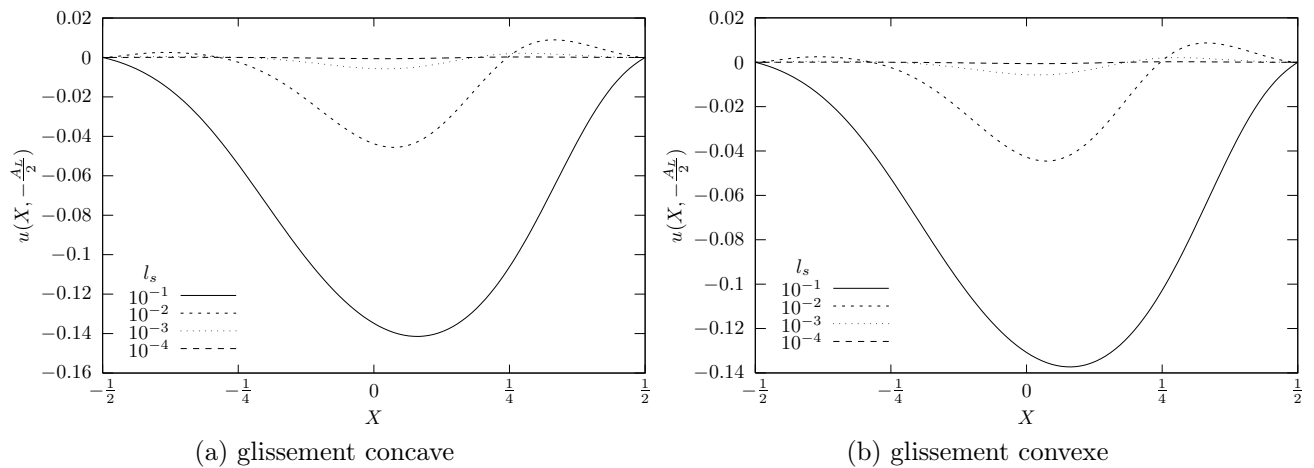
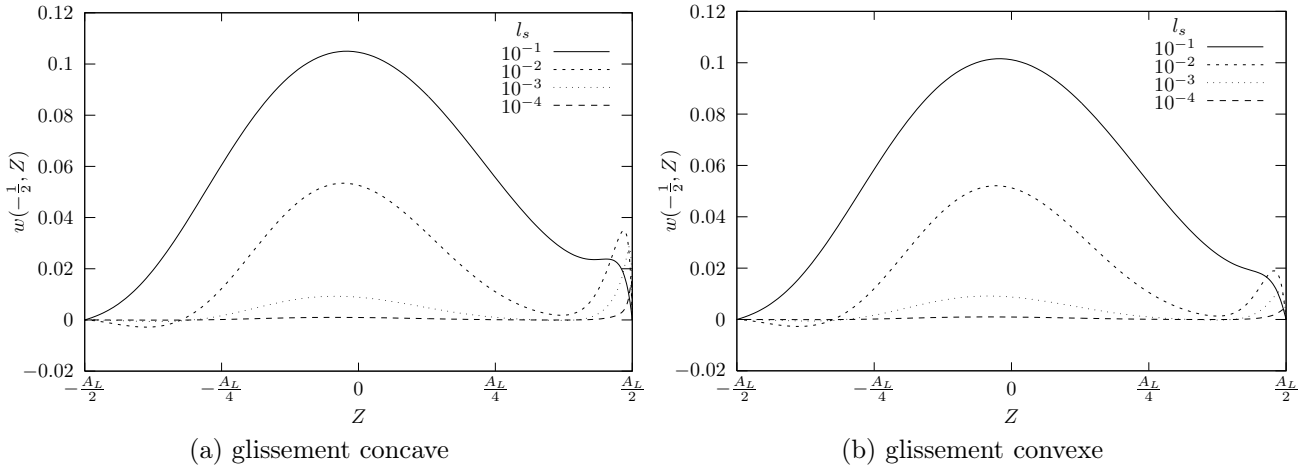


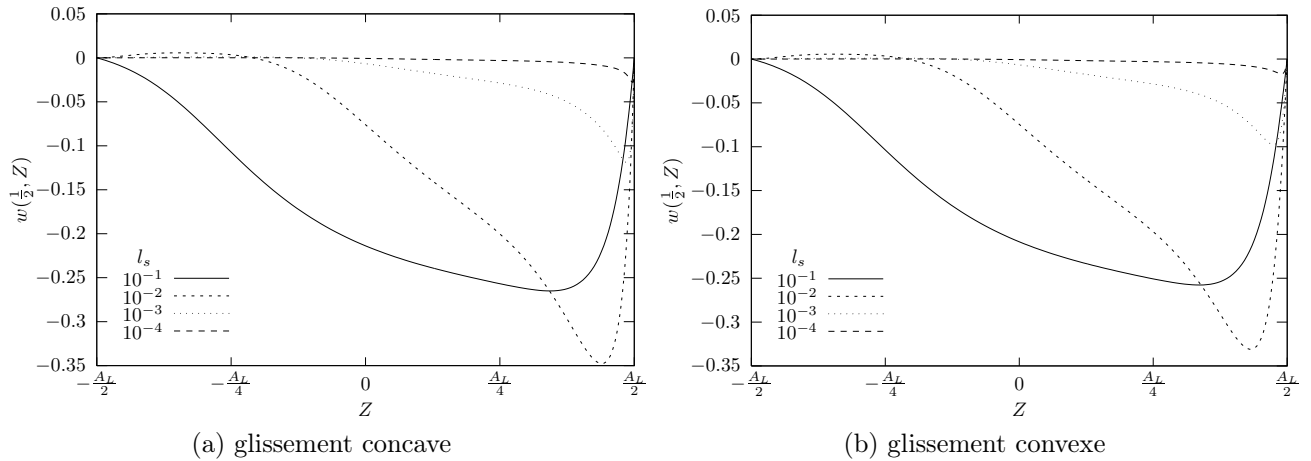
FIGURE 7.13 – Profils de vitesse sur le fond,  $z = -1/2$ .

Les profils de vitesse horizontale le long du fond de la cavité, pour les 4 valeurs du paramètre de glissement, sont représentés sur les figures 7.13a et 7.13b, dans les cas concave et convexe. L'introduction d'une condition de Navier permet au fluide de glisser le long du fond. Les profils comportent un minimum de vitesse, le mouvement étant de la droite vers la gauche, situé près du centre du fond. Ce minimum de vitesse est d'autant plus bas que le paramètre de glissement a une valeur élevée. Pour  $l_s = 10^{-1}$ , la vitesse est négative, de signe constant : il n'y a alors qu'une cellule principale. Dans chaque coin, le profil de vitesse fait un angle non nul avec l'horizontale. Pour  $l_s = 10^{-2}$  et  $10^{-3}$ , la vitesse est négative au centre de la cavité et positive dans les coins, révélant l'existence de structures secondaires. Pour  $l_s = 10^{-4}$ , la vitesse sur le fond est quasiment nulle.

FIGURE 7.14 – Profils de vitesse sur le mur de gauche,  $x = -1/2$ .

La vitesse le long de la paroi verticale de gauche, représentée sur les figures 7.14a et 7.14b, est cette fois positive et possède encore un extremum au voisinage du centre du mur. Les vitesses les plus fortes sont associées aux longueurs de glissement les plus importantes. Lorsque  $l_s = 10^{-1}$ , la vitesse est de signe constant positif. Un point d'inflexion existe au voisinage du coin supérieur gauche. Le gradient vertical de vitesse verticale sur cette échelle proche du coin est généré par le gradient horizontal de vitesse horizontale existant à cette jonction sur le couvercle. L'existence de ce gradient vertical de vitesse est due au caractère incompressible de l'écoulement. Le signe constant de la vitesse verticale confirme qu'il n'y a pas de recirculation dans le coin inférieur droit pour  $l_s = 10^{-1}$ .    $l_s = 10^{-2}$  et  $10^{-3}$ , le point d'inflexion se sépare en un maximum près du coin et un minimum un peu plus loin du coin. Le profil de vitesse possède toujours un maximum local vers le centre de la paroi. Près du coin, l'échelle sur laquelle le gradient de vitesse verticale annule la divergence devient plus fine en même temps que le profil sur le couvercle devient plus raide à la jonction. La vitesse verticale est négative au bas de la paroi, près du fond de la cavité. Il existe une cellule de recirculation à cet endroit. Pour  $l_s = 10^{-4}$  la vitesse est quasiment nulle sur toute la paroi, excepté sur une échelle de longueur très petite proche de la jonction paroi/couvercle où existe un maximum très localisé.

Enfin, les profils de vitesse verticale le long de la paroi de droite, voir figures 7.15a et 7.15b présentent aussi des vitesses non-nulles. Les profils présentent tous un minimum de vitesse qui n'est pas situé près du centre de la paroi contrairement à la paroi de gauche et au fond. Ceci indique que ce maximum est d'origine inertielle tandis que les deux autres sont dus au cisaillement de la cellule principale sur les murs. Le cisaillement près du mur est aussi présent mais les effets inertiels sont plus importants. Pour  $l_s = 10^{-4}$  la vitesse est négative de signe constant sur toute la longueur de la paroi. Pour  $l_s = 10^{-3}$  et  $10^{-2}$  la vitesse change une fois de signe en bas de la paroi du fait de l'existence d'une cellule de recirculation. Pour  $l_s = 10^{-4}$  la vitesse est quasiment nulle tout le long du mur sauf au voisinage du couvercle. En même temps que le paramètre de glissement diminue, seuls les effets inertiels proches du couvercle subsistent

FIGURE 7.15 – Profils de vitesse sur le mur de droite,  $x = +1/2$ .

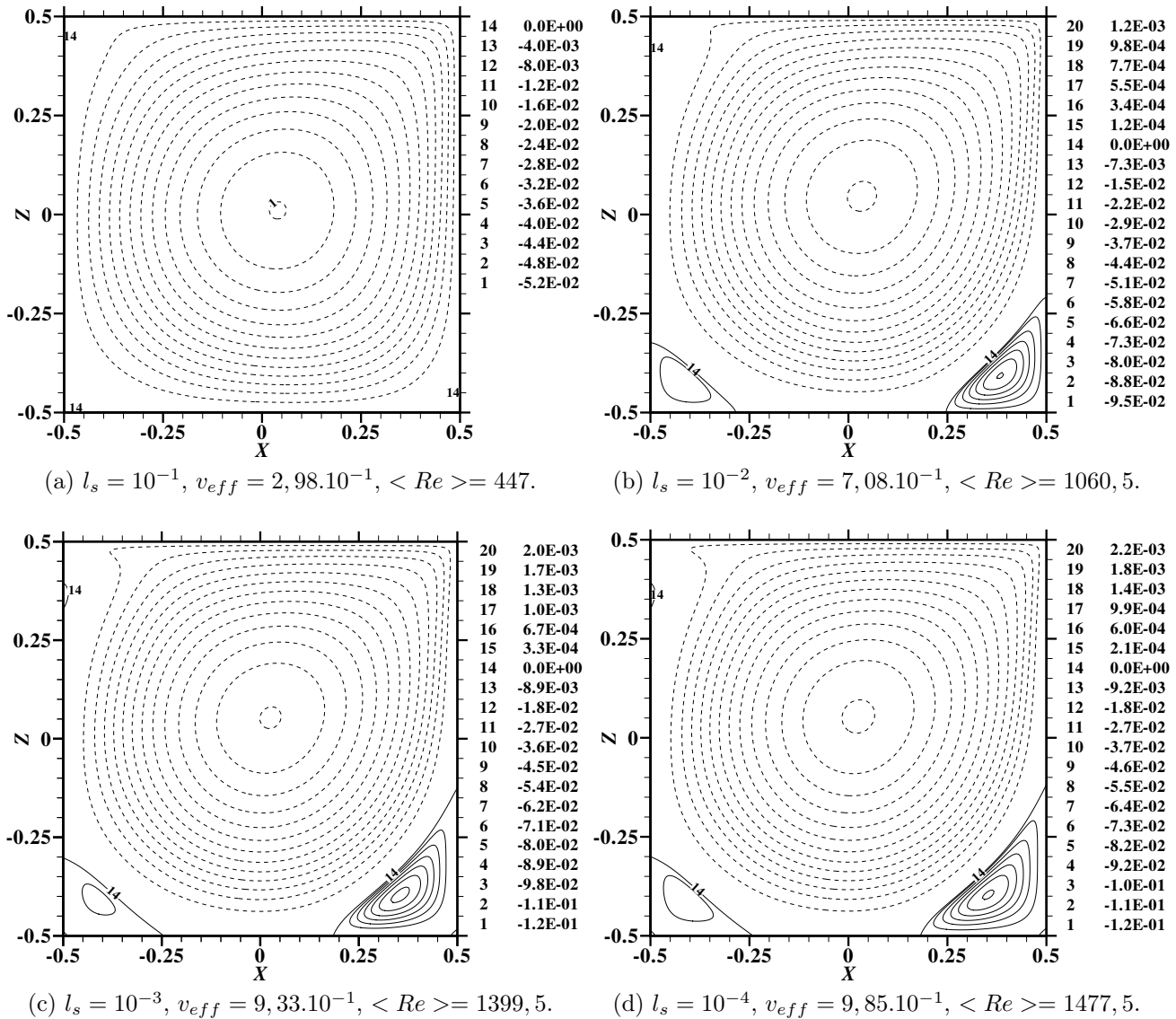
pour permettre l'annulation de la divergence.

#### 7.4.2.2 Fonction de courant et vorticité

L'étude de la divergence a montré que la régularité de l'écoulement ne dépend pas du type de variation choisie pour  $k(x)$  (concave ou convexe). D'autre part l'analyse des profils de vitesse le long des parois a montré que le glissement induit des comportements bien distincts du cas non-glissant régularisé. La seule différence notable entre les profils correspondant à chaque type de variation de  $k(x)$  est sur le profil de vitesse le long du couvercle qui possède le même caractère concave ou convexe que la condition dont il résulte. Le changement de courbure du profil, du cas convexe, ne pouvant être justifié a priori, c'est la condition de Navier étendue concave qui sera utilisée par la suite.

Les figures 7.16(a-d) montrent les contours de la fonction de courant  $\Psi$  pour  $l_s = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ , tandis que les figures 7.17(a-d) représentent les contours de vorticité correspondante.

Lorsque  $l_s = 10^{-1}$ , la fonction de courant ne change pas de signe et donc l'écoulement ne comporte qu'une seule cellule qui s'étend dans toute la cavité, figure 7.16a, ce qui est en accord avec l'analyse des profils de vitesse le long des parois. Concernant l'absence des cellules de recirculation il est difficile de conclure avec ce seul champ à  $Re = 1500$ . Deux hypothèses sont à envisager : il se peut que le glissement soit trop important pour que le mouvement du couvercle fournisse l'énergie nécessaire à l'apparition de recirculations. Où bien l'importance du glissement inhibe l'apparition de structures secondaires. Un début de réponse est donné dans la section suivante. Les contours de vorticité correspondant sont observables sur la figure 7.17a.

FIGURE 7.16 – Fonction de courant,  $\Psi$ .

Le domaine peut être séparé en deux zones, l'une correspondant aux valeurs négatives de la vorticité et l'autre aux valeurs positives. Le contour de vorticité nulle, qui marque la limite de ces zones, naît dans le coin supérieur gauche et contourne la cellule principale par le bas pour rejoindre le coin supérieur droit. La première zone est induite par le mouvement du couvercle. Le long de ce dernier la vorticité doit être négative pour respecter les conditions aux limites. La seconde zone se trouve à l'extérieur de la cellule principale, le long des parois verticales et du fond ou le cisaillement du fluide traduit la perte de quantité de mouvement du fluide par friction avec les parois immobiles. Le cœur de la cellule de recirculation située au centre de la cavité, est dans la zone négative de vorticité.   cet endroit la vorticité est presque constante ce qui indique que le fluide y est quasiment en rotation solide. La zone de forte variation de

la vorticité constitue la couche limite de l'écoulement où le fluide échange de la quantité de mouvement avec les parois par cisaillement.

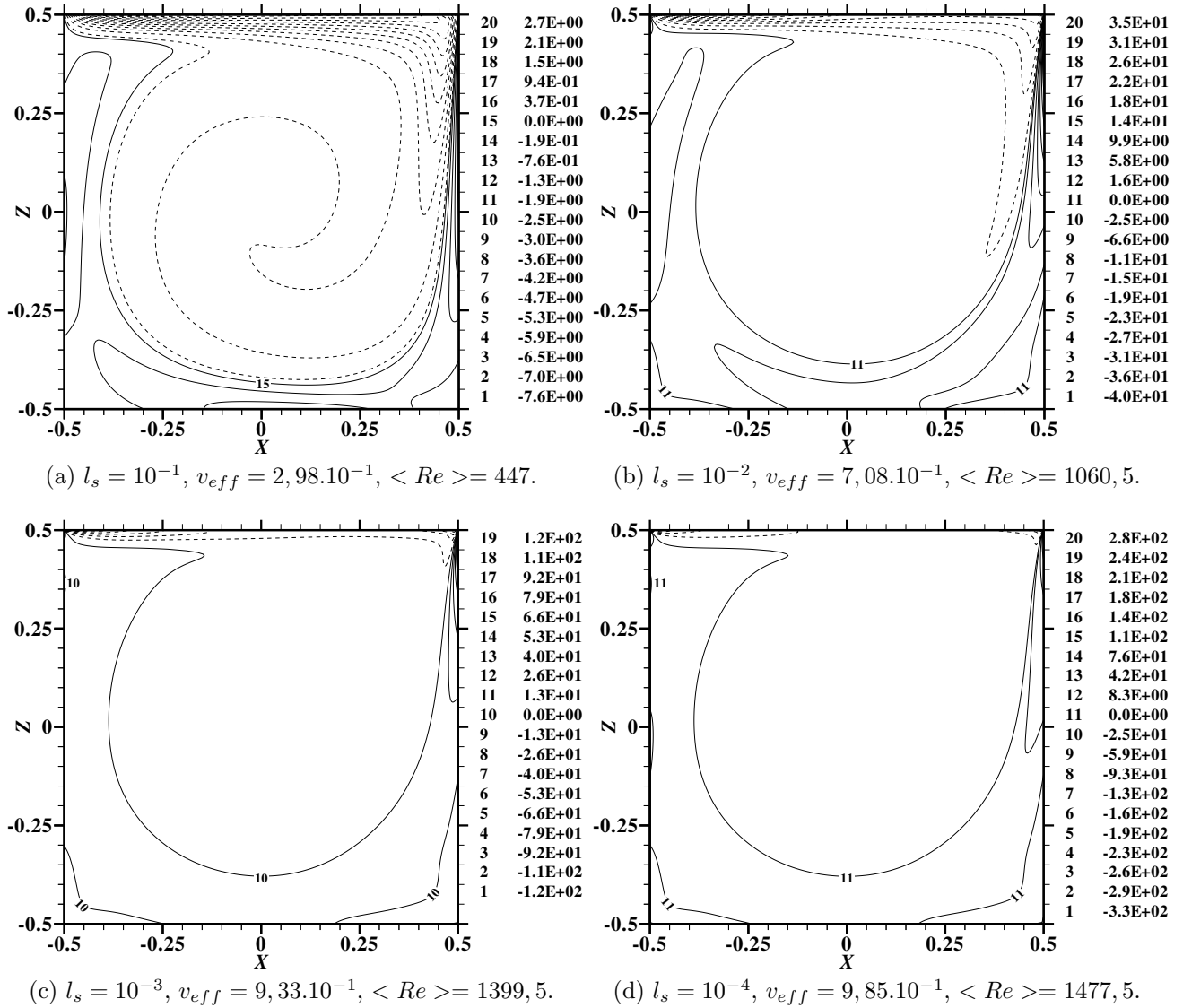


FIGURE 7.17 – Rotationnel,  $\omega$ .

À partir de  $l_s = 10^{-2}$ , les deux cellules de recirculations inférieures sont présentes dans l'écoulement et bien développées (fig. 7.16b). La cellule principale s'est retirée des coins inférieurs mais occupe toujours l'angle supérieur droit sous l'effet de l'inertie. Les extrema de la fonction de courant sont plus importants en valeur absolue, que pour  $l_s = 10^{-1}$ . Les contours de vorticité, (fig. 7.17b), montrent que la couche limite est plus fine. Le cœur de la cellule principale est à présent très bien décrit par une rotation solide pour  $l_s = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ .



Pour  $l_s = 10^{-3}$  et  $10^{-4}$ , la troisième cellule de recirculation est présente en haut de la paroi de gauche sous le couvercle, en plus des deux cellules inférieures (fig. 7.16d). L'angle supérieur droit est encore occupé par la cellule principale, sous l'effet de l'inertie du fluide. Les extrema de la fonction de courant sont d'autant plus importants que le paramètre de glissement est proche de zéro. Les gradients de vorticité sont très resserrés sur les parois et très importants : la couche limite est aplatie (fig. 7.17d). Le cœur de la cellule principale est toujours en rotation solide. Mis à part les valeurs des extrema de la fonction de courant et de vorticité qui sont plus importantes pour  $l_s = 10^{-4}$  que pour  $l_s = 10^{-3}$  il n'y a pas de différences très importantes entre les écoulements obtenus pour ces deux valeurs du paramètre de glissement.

Pour les valeurs de  $l_s$  proches de zéro, les écoulements avec condition de Navier étendue, possèdent une structure très voisine de ceux obtenus pour des régularisations très faible (paramètre de régularisation  $n$  grand). En revanche, les solutions obtenues pour les glissements importants sont très différentes des solutions à forte régularisation. La régularisation ne constitue donc pas une approximation d'un modèle de glissement de Navier car elle ne reproduit que la limite des glissements négligeables ( $l_s \rightarrow 0$ ). Les solutions obtenues pour de trop fortes régularisations n'ont donc pas de sens physique.

### 7.4.3 Transition vers l'état instationnaire en concave

L'influence du glissement sur les écoulements est à présent mise en évidence par la détermination des seuils de transition vers les  tats instationnaires. Le tableau 7.4, présente les intervalles de localisation du nombre de Reynolds critique lorsqu'un état périodique a pu être atteint, la pulsation adimensionnée  $\omega$  pour un Reynolds égal à la borne supérieure de l'intervalle, le maillage et le pas de temps correspondants, les vitesses effectives, l'intervalle de localisation du Reynolds critique effectif et la divergence de la vitesse pour  $l_s = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ , aux maillages et pas de temps  $\delta t$  indiqués. Les profils de vitesse le long du couvercle étant très différents de ceux résultant d'une régularisation l'emploi de la vitesse effective fournit un critère de comparaison objectif avec les résultats du tableau 7.2. La vitesse effective est calculée de la même façon que dans le cas précédent :  $v_{eff} = \int_{-1/2}^{+1/2} u(x, \frac{A_L}{2}) dx$ . Le profil étant variable et dépendant du paramètre de glissement et du nombre de Reynolds (voir fig. 7.12a), il en est de même pour la vitesse effective. La vitesse effective utilisée pour normaliser le nombre de Reynolds est celle de la borne inférieure de l'intervalle.

$l_s$	$N_x \times N_z$	$\delta t$	$Re_c$	$\omega$	$v_{eff}$	$< Re_c >$	$\max_{\Omega}  \vec{\nabla} \cdot \vec{V} $
$10^{-1}$	$60 \times 60$	$10^{-2}$	$]100000, -]$	–	$1,74.10^{-1}$	$]17400, -]$	$9,85.10^{-3}$
$10^{-2}$	$80 \times 80$	$10^{-3}$	$]15000, 20000]$	2,867	$5,05.10^{-1}$	$]7575, 10100]$	$2,62.10^{-2}$
$10^{-3}$	$100 \times 100$	$10^{-3}$	$]8500, 9000]$	2.415	$8,90.10^{-1}$	$]7565, 8010]$	$4,66.10^{-1}$

TABLE 7.4 – Seuils d'instationnarité en glissement concave.

Pour  $l_s = 10^{-3}$ , le seuil de transition effectif est très voisin (7%) de celui trouvé en régularisation pour  $n = 16$ . De même la pulsation calculée pour la borne supérieure de l'encadrement

est du même ordre de grandeur soit 2,41 avec le glissement au lieu 2,25.

Pour  $l_s = 10^{-2}$ , le seuil effectif est consistant avec les valeurs observées à  $l_s = 10^{-3}$  et d'une manière générale en régularisation. L'ordre de grandeur de la pulsation est en bon accord avec les résultats décrits précédemment. La légère augmentation de sa valeur (2,87) par rapport à celle obtenue à  $l_s = 10^{-3}$  peut être due en partie à la grossièreté de l'encadrement.

Le nombre de Reynolds critique, à  $l_s = 10^{-1}$ , n'a pas pu être localisé. L'utilisation du Reynolds effectif ( $\langle Re \rangle = Re_{eff}$ ) montre que la vitesse du fluide augmente bien avec le nombre de Reynolds malgré l'importance du glissement. En effet, bien que le maximum de vitesse adimensionnée du fluide diminue lorsque  $Re$  augmente, la vitesse du fluide augmente bien elle aussi, mais moins vite que la vitesse d'entraînement du couvercle. La valeur du plus grand Reynolds effectif atteint, égale à 17400 est bien supérieure à la valeur couramment observée pour la transition vers l'état périodique. L'apparition de l'état périodique est soit retardée, soit évitée par la présence du glissement.

Pour mieux comprendre l'influence du glissement sur la position du seuil, la fonction de courant et la vorticité sont tracées pour  $l_s = 10^{-3}$  (figure 7.18) et  $l_s = 10^{-1}$  (figure 7.19) à un Reynolds égal à la borne inférieure de l'encadrement de  $Re_c$  du tableau 7.4.

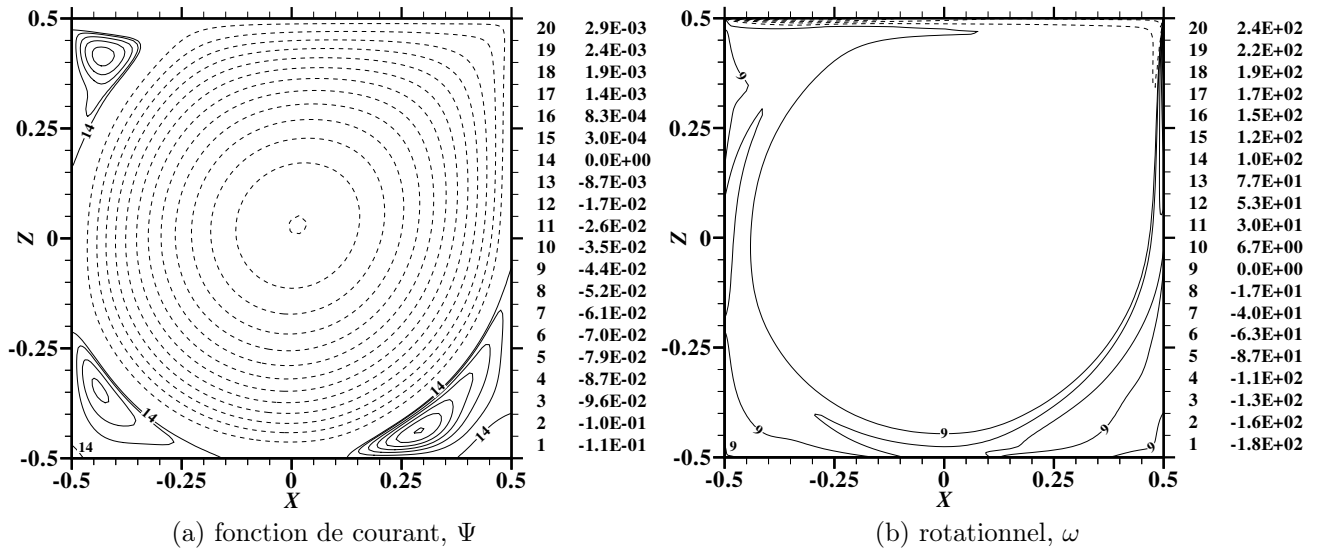


FIGURE 7.18 – Glissement non uniforme  $l_s = 10^{-3}$ ,  $Re = 8500$ ,  $v_{eff} = 8,9 \cdot 10^{-1}$ ,  $\langle Re \rangle = 7565$ .

Les lignes de courant et les contours de vorticité (figure 7.18), pour  $l_s = 10^{-3}$  à  $Re = 8500$ , sont semblables à celles décrites dans la littérature (Ghia *et al.* [53]) juste avant la transition. La fonction de courant (fig. 7.18a) comporte trois zones de recirculation, dont la structure du coin supérieur gauche qui est ici complètement développée. Dans le coin inférieur droit, une plus petite cellule secondaire est nettement visible, suggérant l'existence d'une série infinie de tourbillons de Moffatt. La vorticité (fig. 7.18b) révèle que la couche limite est écrasée le long des parois solides. Le cisaillement est quasiment nul dans la partie centrale.

Pour  $l_s = 10^{-1}$ , à un Reynolds de  $10^5$  ( $\langle Re \rangle = 17400$ ), la fonction de courant (fig.

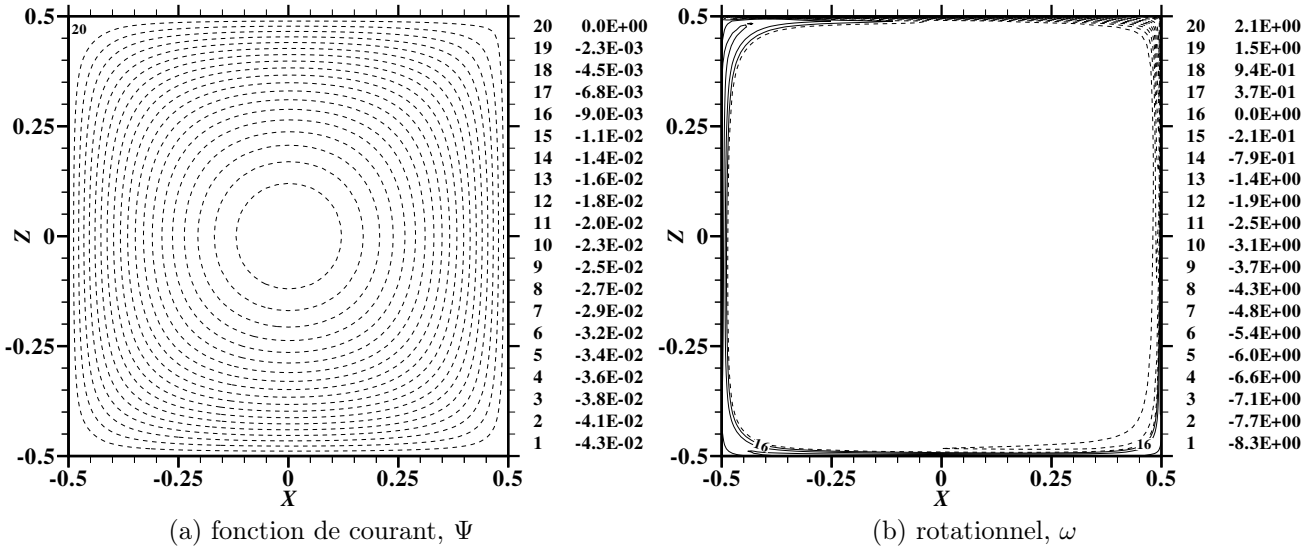


FIGURE 7.19 – Glissement non uniforme  $l_s = 10^{-1}$ ,  $Re = 10^5$ ,  $v_{eff} = 1,74 \cdot 10^{-1}$ ,  $\langle Re \rangle = 17400$ .

7.19a) ne comporte toujours qu'une seule cellule qui occupe tout le domaine. Le fluide est déplacé suivant un mouvement proche de la rotation solide. L'importance du glissement ne permet pas aux recirculations d'apparaître. Les contours de vorticité (fig. 7.19b), montrent que l'intensité du mouvement à écrasé sur les parois la couche limite qui était visible pour  $Re = 1500$  (fig. 7.17a). Toutefois le cisaillement résultant est ici beaucoup moins important que dans le cas des petites valeurs du paramètre de glissement. La vorticité, pour  $l_s = 10^{-1}$ , se situe dans l'intervalle  $[-7, 6; 2, 7]$  à Reynolds 1500, dans  $[-8, 3; 2, 1]$  à Reynolds  $10^5$ , alors que pour  $l_s = 10^{-3}$ , elle évolue dans  $[-1, 8 \cdot 10^2; 2, 4 \cdot 10^2]$  à Reynolds 8500. Ceci semble être la raison pour laquelle il n'y a pas de structures secondaires. D'autre part la transition vers l'état instationnaire semble être liée à la présence des cellules secondaires. La transition n'a pas été trouvée pour le cas  $l_s = 10^{-1}$ . Or aux Reynolds explorés jusqu'ici il n'existe toujours pas de tourbillons dans les coins inférieurs. La dynamique des petites échelles est probablement liée à la stabilité de l'écoulement.

Ceci est très intéressant en regard des nombreuses études effectuées sur les solutions asymptotiques au voisinage d'un angle (Moffatt [104], Huh et Scriven [77], Hocking [71], Gupta *et al.* [61]). La nature des solutions auto-similaires décrites par Moffatt est bien connue, l'article [104] donnant la position du maximum de chaque tourbillon et le rapport des maxima de deux tourbillons successifs. Ces solutions existent dans la mesure où l'approximation de milieu continu est valable jusqu'à une échelle infiniment petite. D'autre part les solutions recherchées sont séparables par rapport aux coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  où le coin étudié est choisi comme origine, le fluide vérifiant les conditions de non-glissement aux parois. La séparabilité est nécessaire pour assurer l'autosimilarité. La fonction de courant prend alors la forme  $\Psi = r^\lambda f(\theta)$ . Dans les coins formés par le fond et les parois verticales, la partie réelle de  $\lambda$  est égale à 3,7. Ceci

conduit à une singularité sur les dérivées secondes de la vorticité qui sont en  $r^{\lambda-4}$ , soit une puissance négative de  $r$ , qui tend vers l'infini en 0 (voir Moffatt [104], Botella et Peyret [15]). Cette discontinuité locale est souvent qualifiée de singularité faible. Les méthodes spectrales ne nécessitent pas d'introduire une gestion particulière des coins inférieurs droit et gauche, comme en attestent les résultats de convergence en régularisation (section 7.2). Il est possible de montrer que l'introduction du glissement brise la séparabilité de la solution asymptotique. Ceci a aussi été discuté par Huh et Scriven [77]. La solution en présence de glissement a été calculée par Hocking [71]. Les conditions de glissement introduites dans cette thèse pour les deux coins inférieurs, sont des conditions de Navier classiques, c'est-à-dire les même conditions que celles discutées par Huh et Scriven [77] et utilisées par Hocking [71] dans son calcul dans le cas de la ligne de contact mobile. Les solutions numériques présentées dans cette thèse contiennent donc, au voisinage des deux coins, les solutions asymptotiques discutées par ces auteurs dans le cas d'un écoulement entre deux parois solides formant un angle, induit par un entraînement extérieur (traité par Moffatt [104] sans glissement)<sup>(2)</sup>.

Pour approfondir l'interprétation des résultats, il est nécessaire de revenir sur la signification du paramètre de glissement. La longueur de glissement, sur les parois verticales et le fond, est une grandeur possédant une valeur fixe, déterminée par les caractéristiques physiques du fluide et du solide. Le paramètre de glissement,  $l_s = \frac{\mu}{kL}$ , est le rapport de la longueur de glissement sur la longueur de référence. Pour un fluide et un solide donné, faire varier le paramètre de glissement revient à considérer desavit s de dimension différentes. Les valeurs de glissement couramment observées par les expérimentateurs, Churaev *et al.* [31], Pit [116], Zhu et Grannick [152], Cottin-Bizonne *et al.* [33], se situent aux alentours de 500 nm. Cependant, les études théoriques et numériques basées sur la dynamique moléculaire la situent plutôt vers une dizaine de nm. Une longueur de glissement de  $10^{-1}$ , fixe donc les dimensions de laavit  dans les échelles microscopiques voir nanoscopiques. Les paramètres de glissement les plus faibles utilisés dans cette thèse,  $l_s = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ , se rapportent à desavit s de quelques millimètres. Les résultats obtenus fournissent des indications sur la structure asymptotique des écoulements au voisinage des coins fixes. Même si des recirculations apparaissent pour  $l_s = 10^{-4}$ , les structures observées si le glissement est pris en compte ne sont probablement pas des tourbillons de Moffatt. En effet à une distance  $r$  du coin, il est possible de définir un paramètre de glissement local,  $l_s^* = \frac{\mu}{kr}$ . En se rapprochant du coin,  $l_s^*$  augmente. Or, lorsque  $l_s^*$  est de l'ordre de  $10^{-1}$ , les tourbillons des distances supérieures n'engendrent pas de tourbillons plus petits. La série infinie de Moffatt ne peut donc exister. Elle se base sur l'hypothèse que le milieu reste continu aux échelles infiniment petites. Le caractère moléculaire du fluide est en contradiction directe avec cette hypothèse. La prise en compte du glissement introduit une échelle intermédiaire, à laquelle le milieu réagit encore comme s'il était continu mais est sensible aux effets moléculaires, lesquels sont modélisés par la condition de Navier. Le glissement est donc interprétable comme un modèle mésoscopique qui fournit une échelle de coupure pour les recirculations.

Il serait intéressant d'effectuer des comparaisons avec les résultats des simulations en dyna-

---

2. Il ne semble pas exister d'étude asymptotique des écoulements dans un coin induits par un forçage externe à ce jour dans la littérature.

mique moléculaire. L'article de Nie *et al.* [108] présente des résultats obtenus pour des nombres de Reynolds au plus de 50, avec une méthode hybride mélangeant simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes et traitement en dynamique moléculaire dans deux sous-domaines proches des jonctions couvercle/paroi. En approchant la longueur de glissement par la dimension de leur sous-domaine de calcul il est possible d'estimer la valeur du paramètre de glissement correspondant, ce qui conduit à une valeur de  $l_s$  égale à  $3.10^{-2}$ .

D'autre part la méthode utilisée dans cette thèse rend possible le calcul des écoulements à des nombres de Reynolds plus élevés. La détermination précise des seuils de transition et des écoulements périodiques pourrait être l'objet d'une future étude.

L'introduction de conditions de glissement dans la cavité entraînée a permis d'observer leur influence sur les écoulements. La compréhension acquise se r v lera utile dans le cadre des écoulements thermocapillaires.

# VISCOSIMÈTRE D'INTERFACE

L'influence de la viscosité de l'interface liquide/gaz sur un écoulement en canal, présenté en section 3.2, est étudiée à l'aide de trois approches. La première est basée sur la solution analytique du problème introduite par Prud'homme et Gatignol [49]. Elle conserve la singularité de vitesse du fond mobile. Les deux autres font intervenir la résolution approchée de l'équation de Stokes par l'algorithme spectral de diagonalisation par blocs (section 4.2.3). La deuxième approche introduit, de manière classique, un filtrage polynômial arbitraire de la singularité (voir éq. (3.2.13)). La dernière approche remplace la régularisation par la prise en compte du glissement du liquide sur le fond et les parois solides, ce qui permet de lever physiquement la singularité. Les écoulements obtenus par ces deux dernières approches sont comparés en fonction de leurs paramètres de filtrage respectifs : degré du polynôme de régularisation  $N$  et longueur de glissement  $l_s$  associée au modèle de Navier. L'étude de la viscosité interfaciale sur un cas simple va permettre d'en acquérir une meilleure compréhension avant de l'appliquer à un écoulement thermocapillaire et de vérifier que son interaction avec le glissement n'est pas source de difficultés supplémentaires.

## 8.1 Solution analytique

Comme décrit dans [49], les équations peuvent être décomposées en une série de Fourier suivant la direction transverse  $\vec{e}_x$ , ce qui conduit à l'expression suivante de la vitesse longitudinale :

$$v(x, z) = V_0 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \frac{\cosh(m\pi(z - \frac{A_a}{2})) - Vi m\pi \sinh(m\pi(z - \frac{A_a}{2}))}{\cosh(m\pi A_a) + Vi m\pi \sinh(m\pi A_a)} \sin(m\pi(x + \frac{1}{2})), \quad (8.1.1)$$

avec  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  et  $z \in [-\frac{A_a}{2}; \frac{A_a}{2}]$ . Le caractère singulier du problème se traduit par le phénomène de Gibbs présent dans la représentation de la solution analytique par sa série tronquée ; pour  $z = -\frac{A_a}{2}$ , le terme principal de la série devient  $\frac{4}{m\pi} \sin(m\pi(x + \frac{1}{2}))$ , qui est le  $m^{\text{ième}}$  coefficient de la décomposition en série de Fourier de la fonction indicatrice de  $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$  :  $\mathbf{1}_{]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[}(x) = 1$  si  $x \in ] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ , 0 sinon.

Dans le dispositif de Mannheimer, la viscosité d'interface est déterminée expérimentalement en comparant la valeur mesurée de la vitesse au centre de la surface libre à sa valeur théorique pour une interface inviscide, c'est pourquoi celle-ci sera étudiée. Pour une interface visqueuse, l'expression (8.1.1) permet d'écrire la vitesse au centre de la surface  $v(0, \frac{A}{2})$  :

$$v(0, \frac{A_a}{2}) = V_0 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \frac{\sin(m\frac{\pi}{2})}{\cosh(m\pi A_a) + Vi m\pi \sinh(m\pi A_a)}. \quad (8.1.2)$$

De même, il est intéressant de chercher une expression analytique du débit, qui est une quantité globale associée au transport de matière jouant un rôle déterminant pour les applications en microfluidique. Le débit massique  $\mathcal{Q}_M$ , s'obtient en intégrant la vitesse sur une section du canal :

$$\mathcal{Q}_M = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{A_a}{2}}^{\frac{A_a}{2}} v(x, z) dx dz. \quad (8.1.3)$$

Les propriétés de la série de Fourier de  $v$  permettent de calculer  $\mathcal{Q}_M$  en permutant la somme et les intégrales<sup>(1)</sup> :

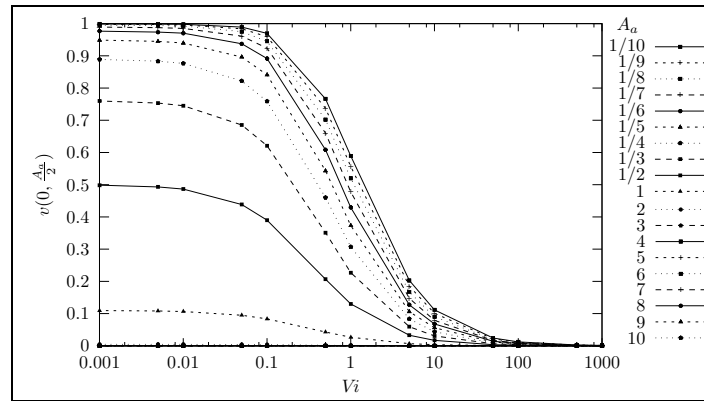
$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_M &= V_0 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(m\pi(x + \frac{1}{2})) dx \int_{-\frac{A_a}{2}}^{\frac{A_a}{2}} \frac{\cosh(m\pi(z - \frac{A_a}{2})) - Vi m\pi \sinh(m\pi(z - \frac{A_a}{2}))}{\cosh(m\pi A_a) + Vi m\pi \sinh(m\pi A_a)} dz, \\ &= V_0 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \frac{2}{m\pi} \frac{\sinh(m\pi A_a) + Vi m\pi (\cosh(m\pi A_a) - 1)}{m\pi (\cosh(m\pi A_a) + Vi m\pi \sinh(m\pi A_a))}, \\ &= V_0 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \frac{8}{m^3 \pi^3} \frac{\sinh(m\pi A_a) + Vi m\pi (\cosh(m\pi A_a) - 1)}{\cosh(m\pi A_a) + Vi m\pi \sinh(m\pi A_a)}. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Par conséquent, l'étude de la solution analytique reposera sur l'observation du comportement de ces deux grandeurs lorsque les paramètres physiques  $A_a = \frac{h}{a}$  et  $Vi = \frac{\varepsilon}{a\mu}$ , varient.

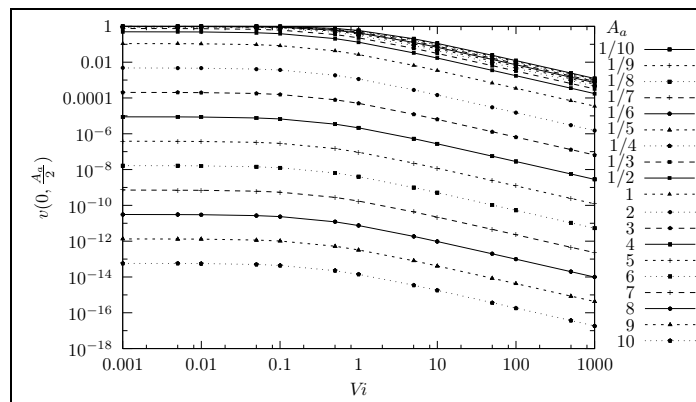
### 8.1.1 Évolution avec la viscosité d'interface

La figure 8.1 représente l'évolution de la vitesse au centre de la surface libre, notée  $V_{sl}$ , lorsque la viscosité d'interface varie entre  $10^{-3}$  et  $10^3$  pour différents rapports d'aspect  $A_a$  fixés. Les vitesses sont représentées en unités adimensionnées par la vitesse du fond donc une valeur de 1 représente une vitesse égale à  $V_0$ . L'axe des abscisses correspondant à la viscosité interfaciale est en échelle logarithmique dans les deux encadrés tandis que celui de droite 8.1(b) représente aussi les vitesses en échelle logarithmique.

1. La limite de la série de Fourier est discontinue en deux points et est bornée donc intégrable. Les sommes partielles de la série sont continues et uniformément bornées - l'amplitude du phénomène de Gibbs étant bornée sur le domaine qui est compact. Le théorème de convergence dominé s'applique et  $\int \sum v = \sum \int v$ .



(a) abscisses en échelle logarithmique



(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique

FIGURE 8.1 – Vitesse au centre de la surface en fonction de  $Vi$ .

Il ressort de l'examen de 8.1(a) que pour une valeur donnée de  $A_a$  la vitesse passe d'une valeur limite correspondant au cas d'une interface inviscide,  $Vi \rightarrow 0$ , à une vitesse tendant vers 0 pour les grandes viscosités, interface rigide :  $Vi \rightarrow \infty$ . L'examen de la figure de droite 8.1(b) met en évidence le caractère similaire des profils de vitesse. Ceux-ci peuvent être approchés par deux droites (en échelle log-log) de pente différente égale à 0 dans la région des petits valeurs de  $Vi$  et approximativement à  $-\frac{1}{3}$  dans la région des grandes valeurs<sup>(2)</sup> de  $Vi$ . Il apparaît aussi que, pour chaque valeur de  $A_a$ , les pentes restent inchangées et seule la vitesse correspondant à la limite inviscide dépend du rapport de forme. Elle décroît et semble tendre vers 0 lorsque  $A_a$  devient suffisamment grand. Ce type de comportement avec deux limites et une transition progressive est bien représenté par la fonction tangente hyperbolique. Une famille de fonctions est alors donnée par  $V_{sl}(Vi) = b(A_a) \tanh(Vi^a)$ , où  $a \simeq -\frac{1}{3}$  est la pente de la droite des interfaces très visqueuses et  $b(A_a) = \lim V_{sl}$  quand  $Vi \rightarrow 0$ , est la vitesse limite en régime inviscide, qui ne dépend que du rapport d'aspect.

Les positions relatives des courbes en fonction de  $A_a$  révèlent encore une fois deux comportements limites qui correspondent aux petits et aux grands rapports d'aspect. Les petits rapports

2. La pente en  $+\infty$  se déduit graphiquement de la figure 8.1(b) en observant que, pour  $Vi$  entre 1 et  $10^3$ , la vitesse décroît approximativement d'un ordre de grandeur.



d'aspect sont relatifs au cas des canaux peu profonds. La vitesse en surface se rapproche alors de celle d'entraînement en même temps que la profondeur du canal devient infiniment mince. Dans le cas des grands rapports d'aspect, la vitesse en surface tend à s'annuler quand la profondeur du canal est grande devant l'échelle de dissipation visqueuse  $\frac{V_0}{\nu}$ . Pour limiter les erreurs lors d'une mesure de viscosité, il conviendra d'utiliser un canal modérément peu profond  $\frac{1}{3} \lesssim A_a < 1$ , ce qui permettra d'obtenir des vitesses suffisamment importantes pour les grandes viscosités. D'une manière générale, le dispositif s'avère mal adapté à la caractérisation des interfaces peu visqueuses car  $V_{sl}$  est déjà très proche de sa limite lorsque  $Vi$  descend en dessous de  $10^{-2}$ .

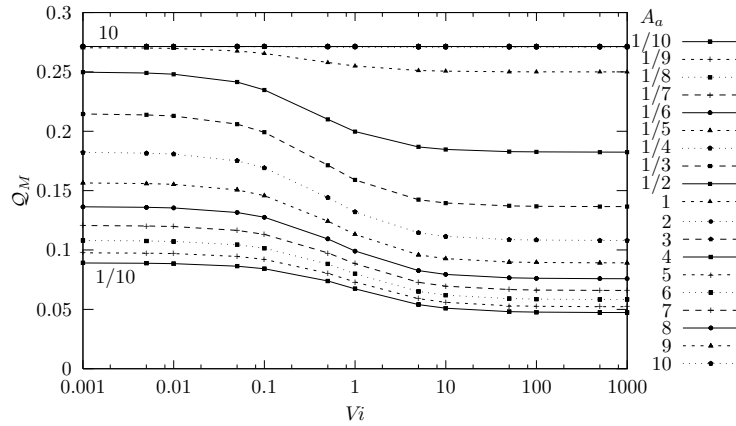


FIGURE 8.2 – Débit massique en fonction de la viscosité d'interface  $Vi$ .

Le comportement du débit (fig. 8.2) peut paraître à première vue en contradiction avec les observations précédentes. En effet, à l'inverse de la vitesse, le débit est maximum pour  $A_a$  grand et les courbes tendent à prendre la valeur constante de 0,2714 tandis que pour les petits  $A_a$ , les valeurs prises par  $Q_M$  sont les plus faibles. Les variations de débit avec la viscosité sont uniquement sensibles dans une zone intermédiaire en  $Vi$  s'étendant approximativement de  $10^{-1}$  à  $10^1$ . En dehors, celui-ci est correctement approché en considérant une surface libre ou rigide selon le cas. Le rôle du rapport d'aspect s'explique par le fait que le débit résulte de la vitesse caractéristique intégrée sur la surface d'une section du canal. Pour une vitesse  $V_0$  donnée, lorsque la profondeur est importante, on peut considérer qu'au delà d'une hauteur limite,  $h^*$ , dépendant de l'échelle visqueuse, la vitesse est nulle. Pour n'importe quel  $A_a$  tel que  $h > h^*$  les profils de vitesse sont alors identiques entre eux lorsque  $-\frac{h}{2} \leq z \leq h^*$  et nuls pour les autres valeurs de  $z$ . Ceci explique que les courbes de débits se confondent pour  $A_a \geq 2$  (voir fig. 8.2). Le fait que les débits correspondants soient constants résulte du fait que la nature de l'interface n'a plus d'influence sur les profils de vitesse pour les grands  $A_a$  et laissent donc l'intégrale de la vitesse inchangée avec les variations de  $Vi$ . Le calcul donne  $Q_M \xrightarrow{A_a \rightarrow \infty} \frac{7\zeta(3)}{\pi^3} \simeq 0,2714$ . La dissipation de l'interface n'aura d'incidence sur le transport de matière par un écoulement que lorsque la profondeur du canal sera telle que  $A_a \leq 1$  et la viscosité de la surface libre  $Vi$  entre  $10^{-1}$  à  $10^1$ . En dehors il sera possible d'utiliser un des comportements limite décrits précédemment pour estimer le débit  $Q_M$ .

### 8.1.2 Évolution avec le rapport d'aspect

Les variations des mêmes grandeurs peuvent être à présent tracées en fonction de  $A_a$  en fixant différentes valeurs de la viscosité d'interface. La figure 8.3 représente les courbes correspondantes pour la vitesse. Pour les grands rapports d'aspect, où  $A_a \gg 1$ , le comportement décrit dans la section précédente est maintenant clairement observable : la vitesse au centre de l'interface décroît rapidement et s'annule quand  $A_a$  augmente. Le comportement des courbes est moins nettement marqué pour  $A_a \ll 1$ . Toutefois il semble que toutes les courbes tendent à saturer vers la vitesse du fond lorsque  $A_a$  décroît. Ce comportement asymptotique est bien visible pour la plus petite viscosité d'interface tracée ( $Vi = 10^{-3}$ ). Ceci indique que la limite est atteinte lorsque la hauteur du canal  $h$  est négligeable devant la longueur caractéristique engendrée par le rapport des viscosités  $l_{Vi} = \frac{\varepsilon}{\mu}$ , c'est-à-dire quand  $ViA_a$  est suffisamment petit, ce qui revient à annuler le terme diffusif de la condition (3.2.12) et traduit une surface libre de cisaillement. Pour  $Vi = 10^3$ , l'interface se rapproche d'une paroi solide à laquelle le fluide adhère et la vitesse est quasiment nulle.

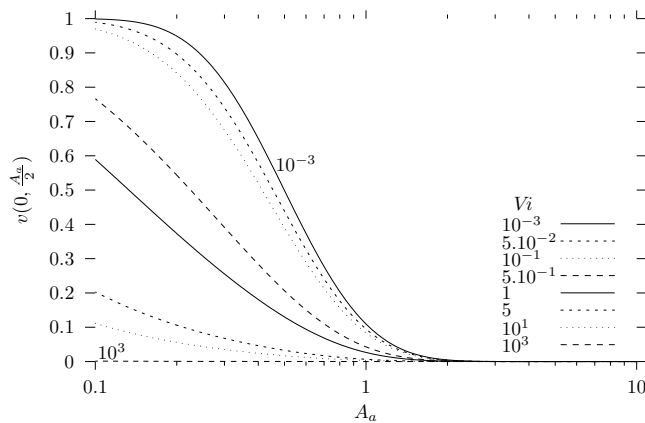


FIGURE 8.3 – Vitesse au centre de la surface en fonction de  $A_a$ .

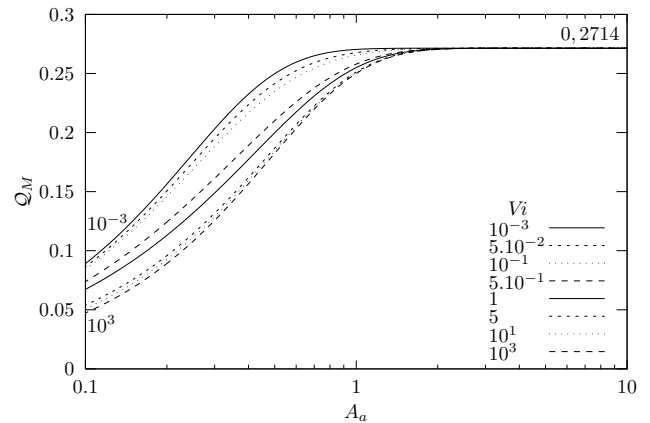


FIGURE 8.4 – Débit massique en fonction du rapport d'aspect  $A_a$ .

Les variations du débit avec le rapport d'aspect, représentées sur la figure 8.4, confirment que quelle que soit la viscosité de l'interface, la même valeur est atteinte dans le régime asymptotique où  $A_a$  est grand. Il apparaît de plus que la viscosité d'interface peut influencer le débit de manière non négligeable dès que le rapport d'aspect est inférieur à 1. Le débit dépendra de la dissipation de l'interface lorsque  $Vi$  sera de l'ordre de 1. Pour  $A_a \leq 0,1$ , les différentes courbes de débit en fonction de la dissipation d'interface se confondent pour les tracés correspondant à  $Vi \ll 1$  et à  $Vi \gg 1$ .

## 8.2 Entraînement régularisé

Le filtrage polynômial de la singularité de vitesse présenté en section 3.2.2 est à présent utilisé. Son influence sur les propriétés de l'écoulement est caractérisée par la comparaison des

comportements de la vitesse au centre de l'interface et du débit avec ceux obtenus précédemment grâce au calcul analytique. Au préalable, les profils de vitesse résultant de la régularisation sont décrits, ce qui va permettre de les comparer lorsque l'introduction du glissement sera discutée.

### 8.2.1 Évolution des profils de vitesse avec la longueur de filtrage

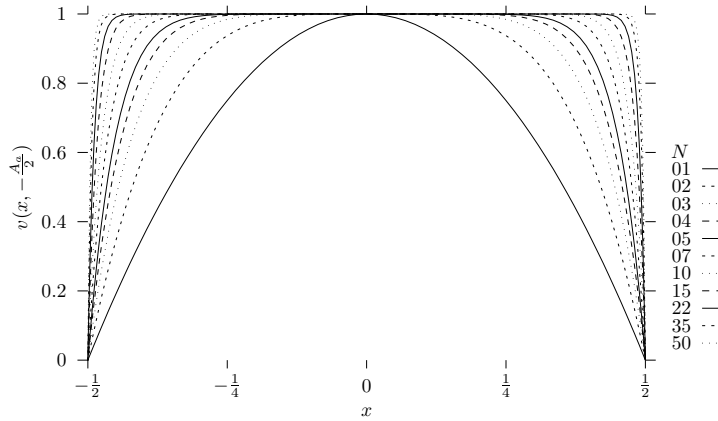


FIGURE 8.5 – Profils de vitesse au fond du canal en  $z = -\frac{A_a}{2}$  pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

Les figures 8.5, 8.6 et 8.7 représentent les valeurs de la vitesse en fonction de la position dans la direction transverse aux hauteurs respectives  $z = -\frac{A_a}{2}$  correspondant au fond,  $-\frac{A_a}{4}$  au quart de la hauteur et  $\frac{A_a}{2}$  à l'interface. Sur chacune des figures les profils de vitesse sont représentés pour un échantillon de paramètres de régularisation  $N$  compris entre 1 et 50, un rapport d'aspect  $A_a = 1$ , une viscosité interfaciale  $Vi = 10^{-2}$  et une base de polynômes allant jusqu'au degré 90 en  $x$  et 60 en  $z$ .

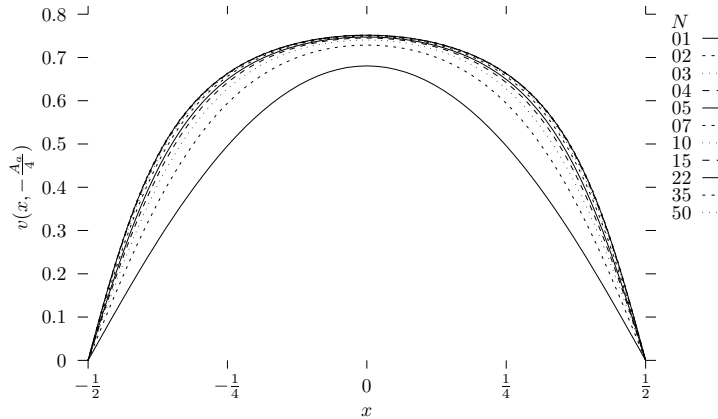


FIGURE 8.6 – Profils de vitesse en  $z = -\frac{A_a}{4}$  pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

Les conditions aux limites (3.2.13) et (3.2.16) imposent une vitesse nulle sur les parois verticales et égale à 1 sur le fond à l'exception d'une région voisine des coins dont la taille

décroît avec l'augmentation du degré du polynôme de régularisation. Ceci est visible sur la figure 8.5 qui se rapproche de la fonction créneau  $\mathbf{1}_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$  lorsque  $N$  augmente.

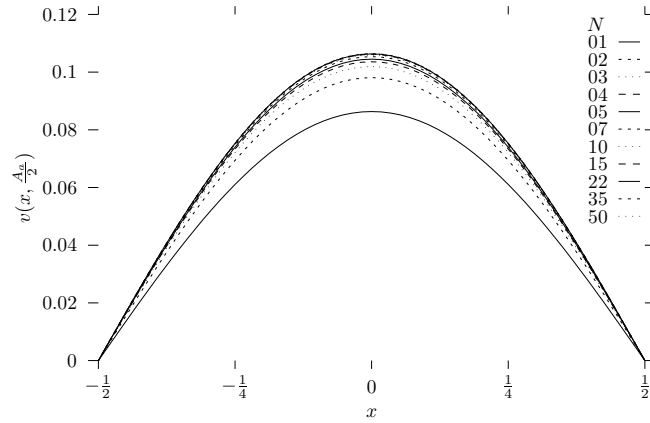


FIGURE 8.7 – Profils de vitesse à la surface du canal en  $z = \frac{A_a}{2}$  pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

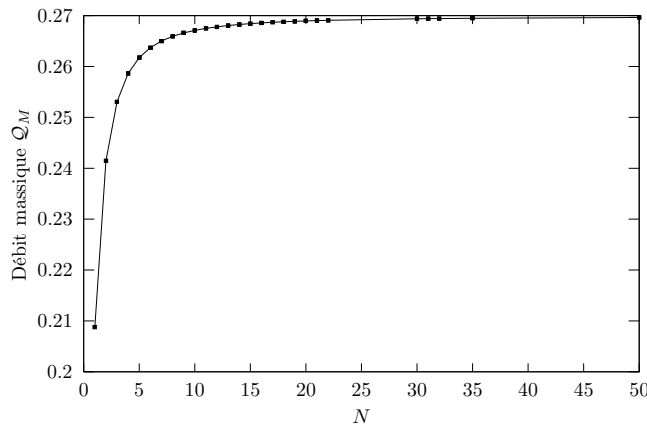


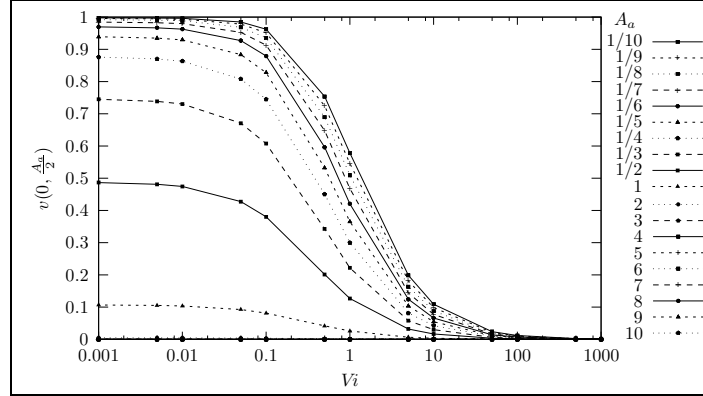
FIGURE 8.8 – Évolution du débit massique avec le filtrage pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

Sous l'effet de la condition d'adhérence de la vitesse qui s'applique sur les murs verticaux, les profils de vitesse sont tous nuls sur les murs. Pour deux valeurs  $n_1 < n_2$  du paramètre de régularisation, les profils de vitesse correspondant ne se coupent que sur les murs et  $v_{n_1} < v_{n_2}$  partout ailleurs, comme cela est visible sur les figures 8.6 et 8.7. Pour  $N$  grand, les profils de vitesse tendent asymptotiquement vers la solution analytique. La relation d'ordre  $v_{n_1} \leq v_{n_2}$  vérifiée par les profils de vitesse s'explique par le fait que, l'écoulement étant purement diffusif, les conditions aux limites déterminent complètement la vitesse. Or sur le fond, qui est l'unique moteur du mouvement, la condition de régularisation impose que  $v_{n_1} = 1 - x^{2n_1} \leq v_{n_2} = 1 - x^{2n_2}$  sauf dans les coins où les deux vitesses sont nulles.

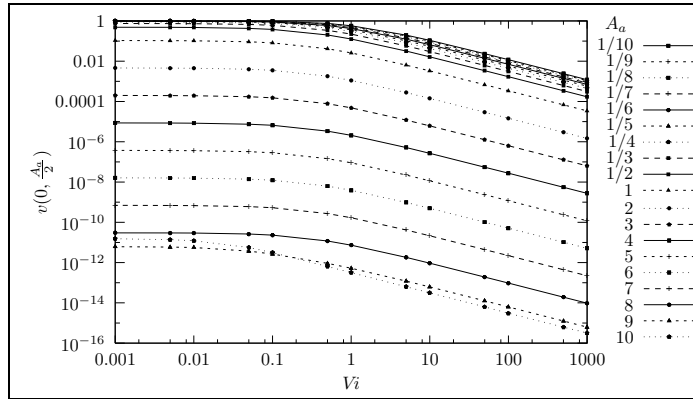
La figure 8.8 représente l'évolution du débit massique avec le paramètre de régularisation  $N$ . Celui-ci tend vers la valeur du problème singulier au fur et à mesure que la régularisation se rapproche d'une fonction créneau.

Dans les sections suivantes, le comportement de la solution du problème régularisé est étudié pour une discrétisation spatiale de degré 90 en  $x$  et 60 en  $z$  et à paramètre de régularisation fixé  $N$  égal à 4, tandis que les paramètres physiques du problème varient.

### 8.2.2 Évolution avec la viscosité d'interface



(a) abscisses en échelle logarithmique



(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique

FIGURE 8.9 – Vitesse au centre de la surface en fonction de  $Vi$ , pour  $N = 4$ .

Les courbes de la vitesse au centre de la surface libre (fig. 8.9) et du débit (fig. 8.10) en fonction de la viscosité d'interface se révèlent en tout point semblables à celles obtenues à l'aide de la solution analytique. Ceci provient de la perte d'énergie engendrée par le filtrage de la vitesse sur le fond. L'effet de la régularisation se traduit par un léger décalage vers le bas des différentes courbes qui restent bien décrites par une fonction du type  $V_{sl}(Vi) = b'(A_a) \tanh(Vi^a)$  de même pente que dans le cas analytique. Ceci est plus particulièrement visible pour  $A_a = \frac{1}{2}$  lorsque  $Vi \rightarrow 0$ . La valeur limite de  $V_{sl}$  lue est égale à 0,5 sur la figure 8.1a obtenue analytiquement et légèrement inférieure à 0,5 sur la figure 8.9a. Sur la figure 8.9b les courbes correspondant respectivement à  $A_a = 10$  et  $A_a = 9$  se croisent aux alentours de

$Vi = 0, 1$ . Les très faibles valeurs de la vitesse ( $10^{-12}$ ) au centre de la surface libre induites par les grandes valeurs de rapport d'aspect dont il est question en sont principalement la cause. Il est probable qu'un raffinement du maillage dans la direction verticale n'améliore que de très peu la solution numérique car le seuil de précision numérique de  $10^{-14}$  est pratiquement atteint.

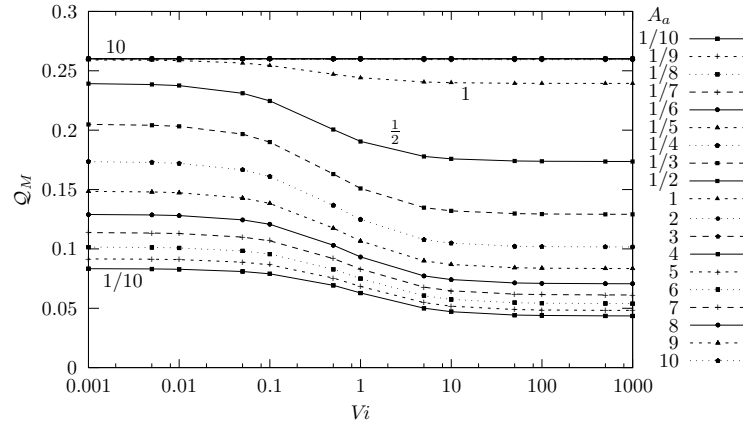


FIGURE 8.10 – Débit massique en fonction de la viscosité d'interface  $Vi$ , pour  $N = 4$ .

En ce qui concerne l'évolution du débit avec la viscosité d'interface, comme représenté sur la figure 8.10, la perte d'énergie se traduit par une diminution du transport de masse qui décale les courbes vers le bas. Cela est encore une fois clairement visible pour  $A_a = \frac{1}{2}$  en régime d'interface inviscide et pour la valeur maximale du débit correspondant aux profondeurs de canal importantes, pour  $A_a > 1$ .

### 8.2.3 Évolution avec le rapport d'aspect

Les tracés de  $V_{sl}$  et de  $Q_M$  en fonction du rapport d'aspect (figures 8.11 et 8.12) ne montrent cette fois aucune différence perceptible avec ceux détaillés dans le cas d'un traitement analytique du problème (voir figures 8.3 et 8.4).

Dans un cas simple comme celui du viscosimètre d'interface, le filtrage polynômial de la singularité fournit une très bonne approximation de la solution analytique du problème. En conclusion, le comportement de  $V_{sl}$  et de  $Q_M$  sont d'autant mieux représentés que  $N$  est assez grand.

## 8.3 Prise en compte du glissement

Le problème du canal associé aux conditions de Navier (3.2.15) et (3.2.17), définies en section 3.2.3, est résolu numériquement. L'influence du glissement sur l'écoulement est caractérisé de la même manière que précédemment pour la régularisation, pour un rapport d'aspect  $A_a = 1$ , une viscosité d'interface  $Vi = 10^{-2}$  et des degrés de polynômes de Chebyshev de 90 en  $x$  et de 60 en  $z$  fixés.

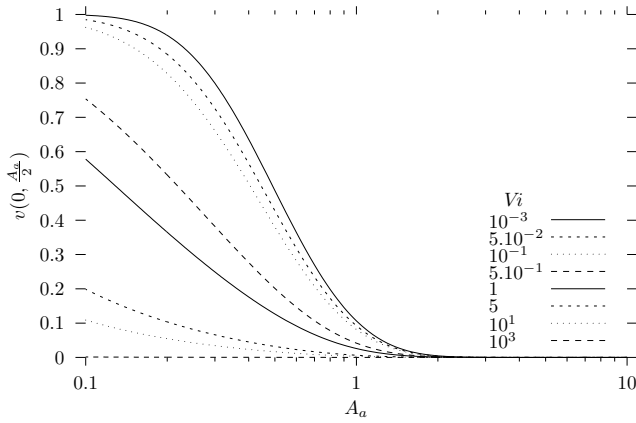


FIGURE 8.11 – Vitesse au centre de la surface en fonction de  $A_a$ , pour  $N = 4$ .

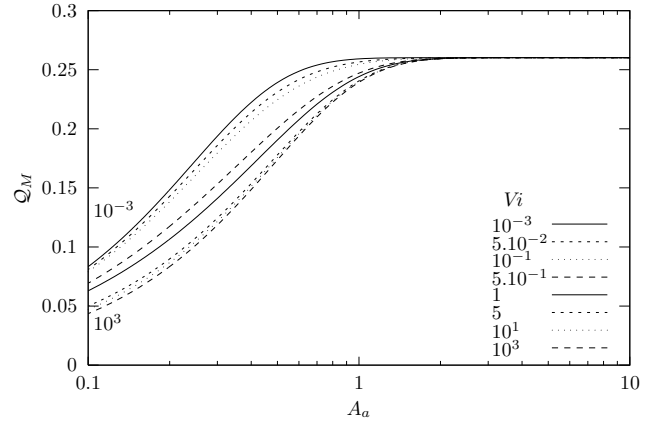


FIGURE 8.12 – Débit massique en fonction du rapport d'aspect  $A_a$ , pour  $N = 4$ .

### 8.3.1 Évolution avec la longueur de glissement

Les figures des profils de vitesse lorsque le paramètre de glissement  $l_s$  varie de  $10^{-5}$  à  $10^{-1}$  révèlent un certain nombre de différences par rapport à la régularisation. Sur le fond, la figure

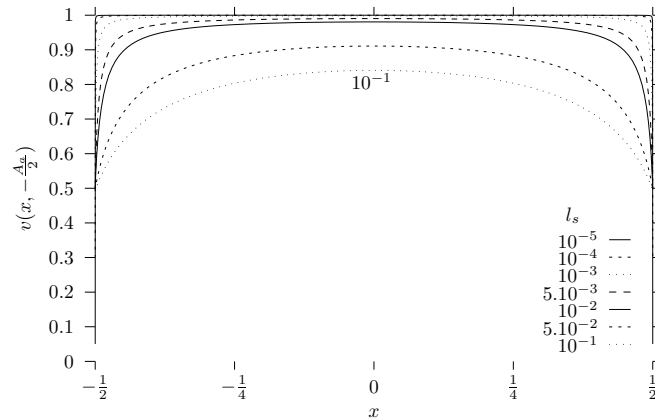
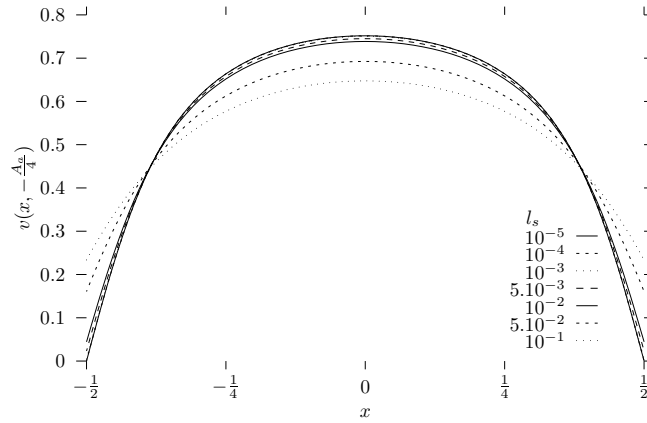
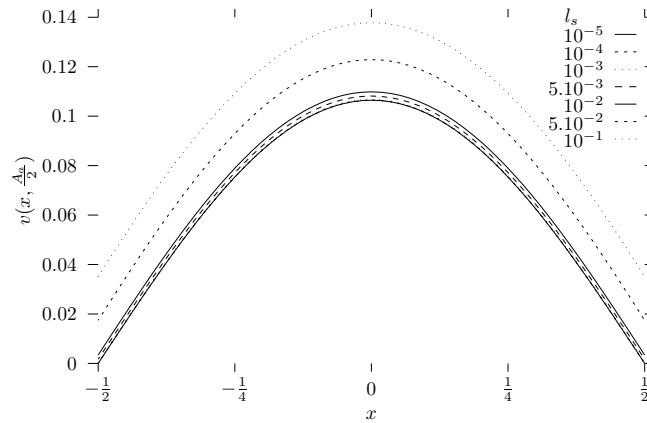


FIGURE 8.13 – Profils de vitesse au fond du canal en  $z = -\frac{A_a}{2}$  pour  $A_a = 1$  et  $V_i = 10^{-2}$ .

8.13 montre que la vitesse décroît sur toute la largeur du canal quand  $l_s$  augmente. Lorsque  $l_s > 10^{-4}$ , l'écart entre la vitesse du fluide et celle du couvercle est nettement visible. En réalité, il existe un glissement dès que  $l_s \neq 0$ . Le fluide glisse sur toute la largeur du fond mais, pour  $l_s = 10^{-5}$  la différence de vitesses est à peine visible près des jonctions entre le fond et les parois du canal et est imperceptible au centre du fond mobile. Dans les coins, la vitesse n'est plus nulle mais est très petite lorsque  $l_s$  est petit : elle est inférieure à 0,1 pour  $l_s = 10^{-5}$  et augmente pour tendre vers 0,5 lorsque le glissement augmente. Le remplacement de la condition d'adhérence permet au fluide d'avoir une vitesse différente entre le fond et les parois dans le coin sans contradiction avec les conditions de frontière imposées. La figure 8.14 représente les

FIGURE 8.14 – Profils de vitesse en  $z = -\frac{A_a}{4}$  pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

profils de vitesse en  $z = -\frac{A_a}{4}$ . Les profils de vitesse correspondant à différentes valeurs de  $l_s$  se croisent entre  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = \frac{1}{2}$ . Ceci est une conséquence directe du glissement. En effet, pour deux valeurs différentes de  $l_s$ , la vitesse est plus importante sur les parois verticales et moins importante au centre du fond pour le glissement le plus grand. L'écoulement étant purement diffusif, ces caractéristiques engendrent le croisement observé à la hauteur  $z = -\frac{A_a}{4}$ . Enfin, sur

FIGURE 8.15 – Profils de vitesse à la surface du canal en  $z = \frac{A_a}{2}$  pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

l'interface (figure 8.15), les profils de vitesse sont quasiment superposables mais déplacés d'un incrément d'autant plus important que le paramètre de glissement est grand. L'évolution du débit avec le glissement, représentée en figure 8.16, montre que celui-ci est une fonction linéaire croissante de  $l_s$ . La figure 8.16b est un agrandissement de la partie encadré pointée par une flèche sur la figure 8.16a. Bien que l'énergie transmise par le fond au fluide diminue à mesure que le glissement devient plus important, l'énergie dissipée par les parois verticales diminue elle aussi. Au final le débit calculé est supérieur à la valeur obtenue par analytiquement. Cette dernière correspond au cas asymptotique dans lequel  $l_s$  tend vers 0. La figure 8.17 représente la répartition des valeurs prises par la vitesse le long des parois verticales, où l'amplitude de la



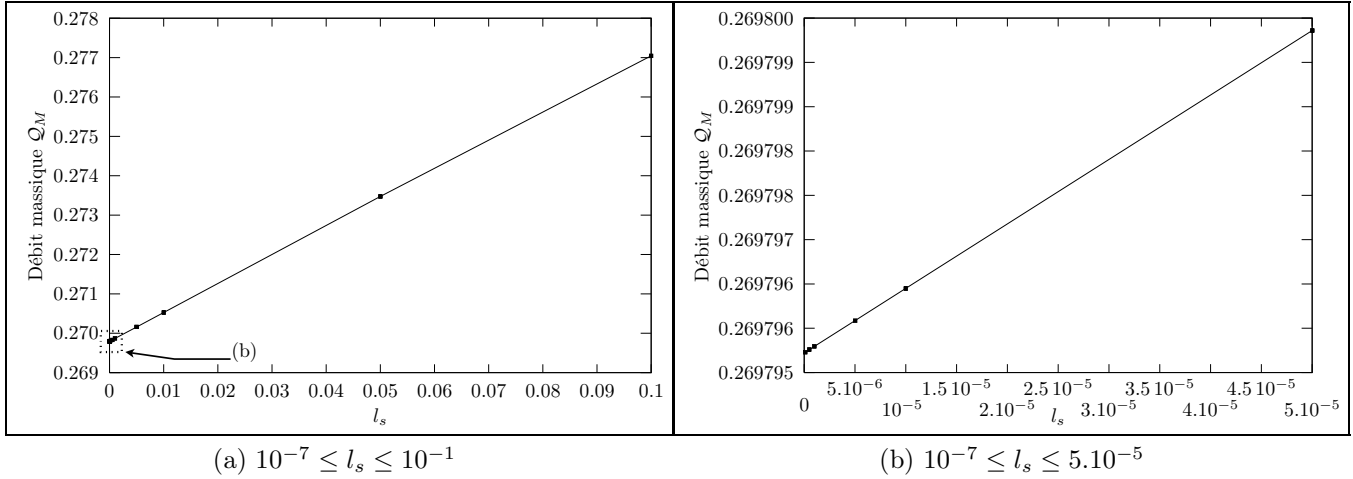


FIGURE 8.16 – Évolution du débit massique avec le glissement pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

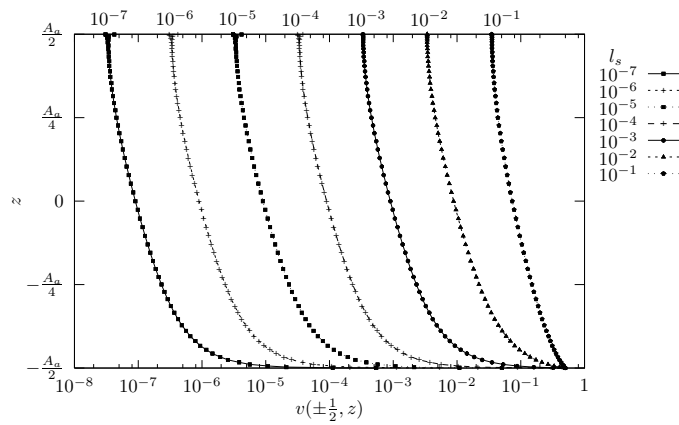
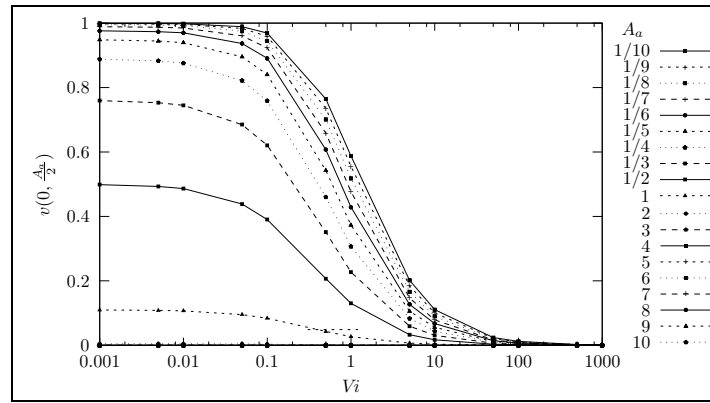


FIGURE 8.17 – Évolution du profil de vitesse le long des parois verticales avec le glissement pour  $A_a = 1$  et  $Vi = 10^{-2}$ .

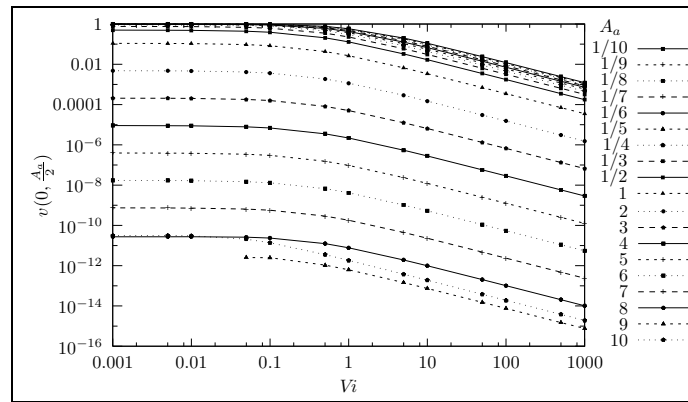
vitesse est lue en échelle logarithmique sur l'axe des abscisses. Pour des  $l_s$  grands, la variation de vitesse entre le bas et le haut du canal,  $v(-\frac{1}{2}, -\frac{A_a}{2}) - v(-\frac{1}{2}, \frac{A_a}{2})$ , est plus importante que pour les  $l_s$  petits.

Dans la suite, le nombre de modes Chebyshev est conservé et la longueur de glissement fixée à  $l_s = 10^{-3}$ .

### 8.3.2 Évolution avec la viscosité d'interface



(a) abscisses en échelle logarithmique



(b) abscisses et ordonnées en échelle logarithmique

FIGURE 8.18 – Vitesse au centre de la surface en fonction  $Vi$ , pour  $l_s = 10^{-3}$ .

Ici encore les profils de vitesse en fonction de la viscosité d'interface  $Vi$  sont tout à fait semblables à ceux obtenus par le calcul analytique. La vitesse au centre de la surface libre peut être encore représentée par une famille de courbes d'équation  $V_s l(Vi) = b''(A_a) \tanh(Vi^a)$  où  $a < 0$ . Pour la valeur de  $l_s$  choisie ( $l_s = 10^{-3}$ ), il n'y a pas de grande différence de vitesse dans la limite inviscide, le profil  $A_a = \frac{1}{2}$  tendant vers 0,5 comme pour la solution analytique. Sur la figure 8.18b, certains points manquent pour les deux plus grands rapports d'aspect 9 et 10. Cela s'explique à la fois par leurs valeurs très proches de 0 ( $\sim 10^{-14}$ ), par le nombre de modes

limité à 60 en  $z$ , et l'utilisation de l'échelle logarithmique.

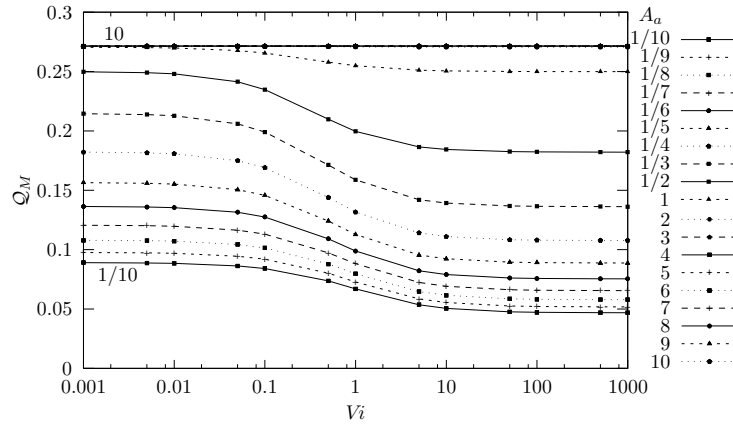


FIGURE 8.19 – Débit massique fonction de la viscosité d'interface  $V_i$ , pour  $l_s = 10^{-3}$ .

Les différences entre les deux calculs sont quant à elles imperceptibles pour le débit (fig. 8.19). Ceci montre que, dès  $l_s = 10^{-3}$ , le transport de matière est peu influencé par le glissement.

### 8.3.3 Évolution avec le rapport d'aspect

Concernant la dépendance de  $V_{sl}$  et de  $Q_M$  vis-à-vis du rapport d'aspect  $A_a$ , les tracés sont tout à fait similaires à ceux obtenus analytiquement ou en régularisation pour cette valeur du paramètre de glissement (figs. 8.20 et 8.21).

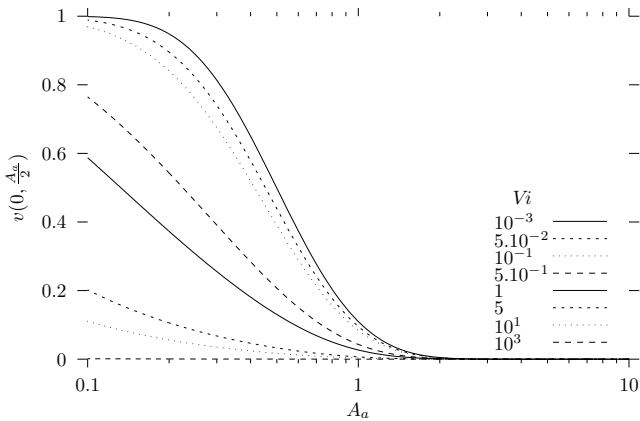


FIGURE 8.20 – Vitesse au centre de la surface en fonction de  $A_a$ , pour  $l_s = 10^{-3}$ .

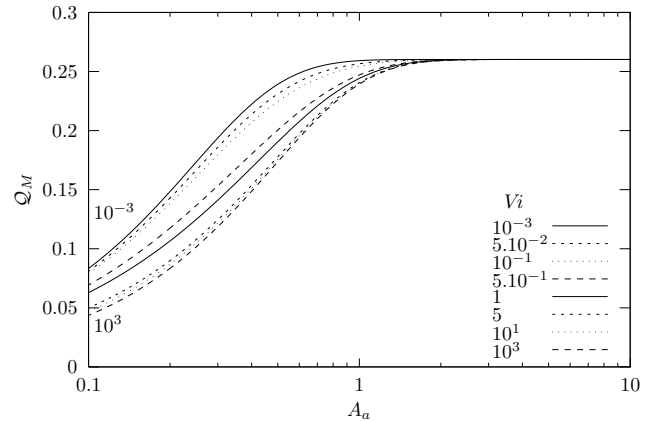


FIGURE 8.21 – Débit massique en fonction du rapport d'aspect  $A_a$ , pour  $l_s = 10^{-3}$ .

### 8.3.4 Comparaison entre régularisation et glissement

Dans le but de comparer plus en détail l'effet des deux approches numériques, il est utile de mesurer la longueur du filtrage induit par l'une ou l'autre. Pour la régularisation, la longueur de filtrage induite par le polynôme a été définie en section 3.2.2 comme la distance à la paroi la plus proche,  $\delta x$ , pour laquelle la vitesse est égale à  $0,95 \times V_0$ , soit  $\delta x = \frac{1}{2} \sqrt[2N]{0,05}$ . Pour le glissement, une définition similaire basée sur la variation totale de vitesse  $|v_{max} - v_{min}|$  est introduite. De plus deux longueurs de filtrage peuvent être définies, une sur le fond  $\delta x_f = |\frac{1}{2} - x^*|$  et l'autre sur les parois verticales  $\delta x_p = |z^* - (-\frac{A_a}{2})|$ . Les deux positions  $x^*$  et  $z^*$  sont définies comme les lieux où les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} v(x^*, -\frac{A_a}{2}) - v(\frac{1}{2}, -\frac{A_a}{2}) &= 0,95(v(0, -\frac{A_a}{2}) - v(\frac{1}{2}, -\frac{A_a}{2})), \\ v(\frac{1}{2}, -\frac{A_a}{2}) - v(\frac{1}{2}, z^*) &= 0,95(v(-\frac{1}{2}, -\frac{A_a}{2}) - v(-\frac{1}{2}, \frac{A_a}{2})). \end{aligned}$$

Ces échelles de filtrage quantifient la longueur sur laquelle agit la vitesse, pour l'une ou l'autre des conditions, levant ainsi la singularité.

$l_s$	$\delta x_f$	$\delta x_p$	$N$	$\delta x$
$1.10^{-7}$	$2,475.10^{-3}$	$5,601.10^{-3}$	50	$1,476.10^{-2}$
$5.10^{-7}$	$2,475.10^{-3}$	$5,601.10^{-3}$	32	$2,286.10^{-2}$
$1.10^{-6}$	$2,476.10^{-3}$	$5,602.10^{-3}$	<b>31</b>	<b><math>2,358.10^{-2}</math></b>
$5.10^{-6}$	$2,479.10^{-3}$	$5,608.10^{-3}$	30	$2,435.10^{-2}$
$1.10^{-5}$	$2,483.10^{-3}$	$5,615.10^{-3}$	20	$3,608.10^{-2}$
$5.10^{-5}$	$2,530.10^{-3}$	$5,688.10^{-3}$	15	$4,752.10^{-2}$
$1.10^{-4}$	$2,623.10^{-3}$	$5,810.10^{-3}$	10	$6,955.10^{-2}$
$5.10^{-4}$	$1,371.10^{-3}$	$1,559.10^{-2}$	9	$7,666.10^{-2}$
<b><math>1.10^{-3}</math></b>	<b><math>2,346.10^{-2}</math></b>	$2,159.10^{-2}$	<b>8</b>	<b><math>8,537.10^{-2}</math></b>
<b><math>5.10^{-3}</math></b>	<b><math>8,865.10^{-2}</math></b>	$1,118.10^{-1}$	7	$9,632.10^{-2}$
$1.10^{-2}$	$1,409.10^{-1}$	$2,006.10^{-1}$	4	$1,562.10^{-1}$
$5.10^{-2}$	$2,785.10^{-1}$	$4,950.10^{-1}$	2	$2,636.10^{-1}$
$1.10^{-1}$	$3,217.10^{-1}$	$6,027.10^{-1}$	1	$3,882.10^{-1}$

TABLE 8.1 – Longueurs de filtrage obtenues par glissement et par régularisation.

Le tableau 8.1 résume les échelles de filtrage correspondant à différentes valeurs de paramètres de glissement  $l_s$  et de régularisation  $N$ . Il ressort que, pour une même valeur de  $l_s$ , les longueurs de filtrage associées au glissement sont toujours du même ordre de grandeur ( $\delta x_f \sim \delta x_p$ ). Les figures 8.22 et 8.23 montrent les profils de vitesse sur le fond et à l'interface obtenus pour deux paires de valeurs de  $l_s$  et  $N$  choisies de telle manière que les longueurs de filtrages correspondantes soient voisines ( $\delta x_f \sim \delta x$ ). Soient  $l_s = 10^{-3}$ ,  $N = 31$  correspondant à une longueur de filtrage d'environ  $2,35.10^{-2}$ , en gras dans le tableau et  $l_s = 5.10^{-3}$ ,  $N = 8$  donnant en moyenne un filtrage de  $8,7.10^{-2}$  en italique gras.

Les profils calculés pour  $l_s = 10^{-3}$  et  $N = 31$  dans les deux approches se ressemblent plus que ceux calculés avec  $l_s = 5.10^{-3}$  et  $N = 8$ . Les différences entre les écoulements régularisés et les écoulements glissants sont les plus importantes sur le fond dans la zone de filtrage (près des coins) où le polynôme de régularisation impose l'adhérence du fluide aux parois verticales tandis que le glissement permet à la vitesse d'être non nulle.

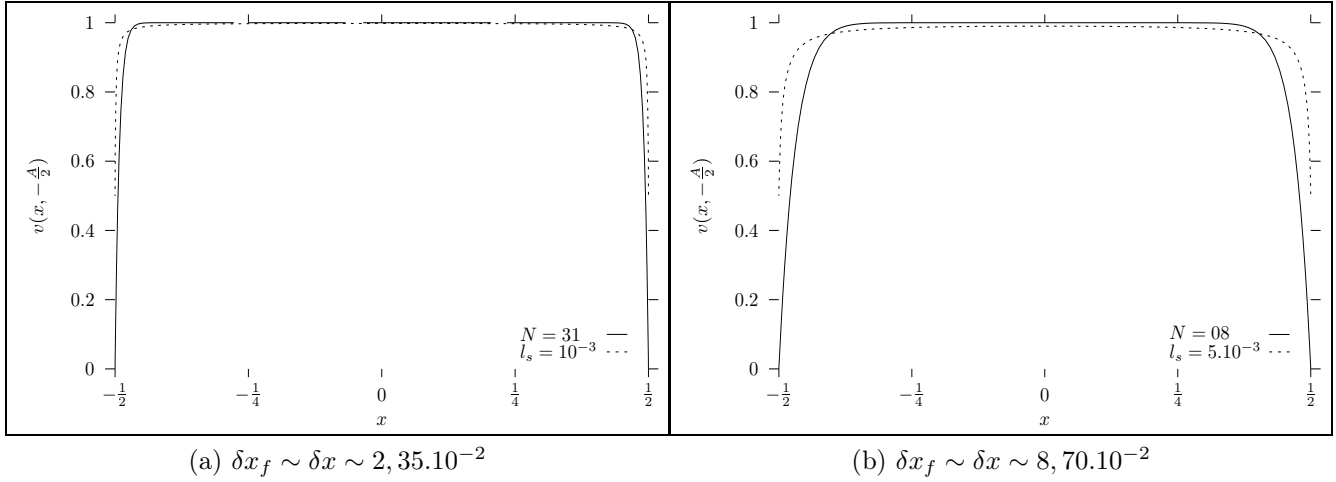


FIGURE 8.22 – Profils de vitesse sur le fond.

L'écoulement sur la surface libre est moins sensible au traitement appliqué à la singularité. Les profils de vitesse restent semblables bien que, lorsque les échelles de filtrage deviennent suffisamment importantes, l'écart entre les deux solutions numériques devienne plus appréciable.

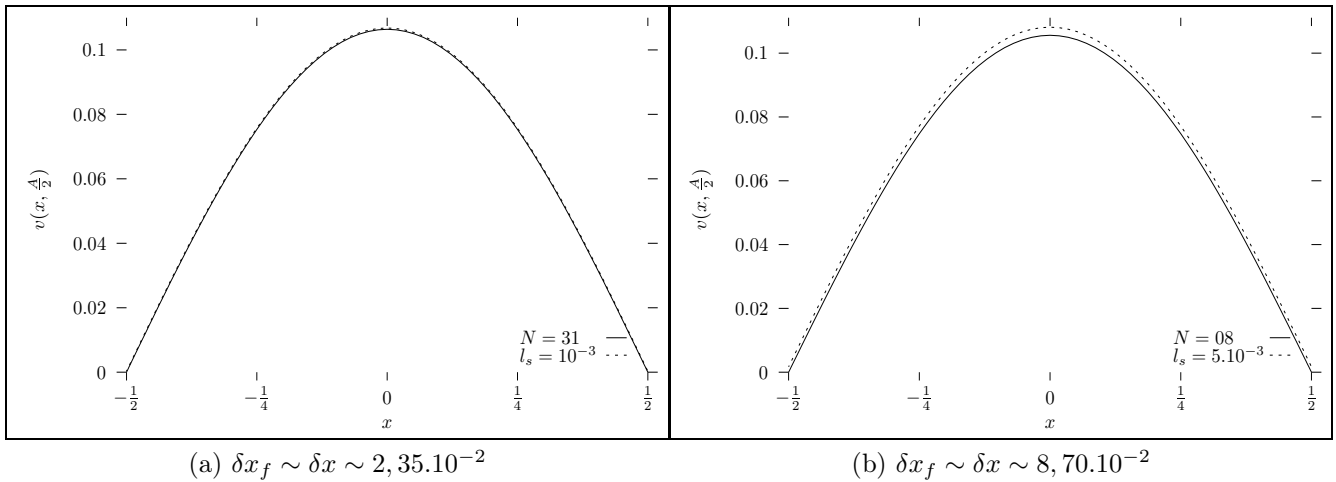


FIGURE 8.23 – Profils de vitesse sur l'interface.

## 8.4 Conclusions

L'étude du viscosimètre d'interface a mis en évidence le rôle joué par la viscosité d'interface de cisaillement. Pour les faibles valeurs de  $Vi$ , le fluide ressent l'interface comme une surface libre de contrainte, tandis que, pour des valeurs importantes de  $Vi$ , l'interface se rapproche d'une paroi solide à laquelle le fluide adhérerait. L'algorithme de diagonalisation par bloc se révèle totalement adapté à ce type de problème en fournissant des résultats tout à fait en accord avec ceux obtenus par une résolution analytique.

L'application d'une régularisation et la prise en compte d'un glissement ont permis de mettre en évidence que, pour de très petites échelles de filtrage, ces deux méthodes ont des effets similaires sur les écoulements. Néanmoins, pour des glissements plus importants, susceptibles d'exister en microfluidique, l'effet du glissement ne peut être représenté par une simple régularisation.

Enfin, le glissement est tout à fait compatible avec la prise en compte conjointe d'une viscosité d'interface. Tant du point de vue numérique, pour lequel le code utilisé représente sans difficulté particulière ces deux phénomènes, que du point de vue physique, ils influent tous deux d'autant plus l'écoulement que la dimension caractéristique du domaine est petite. Ceci met en évidence une des difficultés de ce type d'approche à la limite du continu qui nécessite une très bonne résolution spatiale.



# ÉCOULEMENTS THERMOCAPILLAIRES ET SINGULARITÉ DE VORTICITÉ

La réponse de l'interface fluide/fluide à un forçage dynamique par l'écoulement (étudiée dans le chapitre 8) et le glissement du liquide sur les parois solides (chapitre 7) sont maintenant introduits dans la modélisation des écoulements thermocapillaires en milieu confiné. Une attention toute particulière est portée à la possibilité de lever la singularité de vortacité par les considérations physiques énoncées précédemment.

La configuration étudiée dans ce chapitre consiste en une cuve de section rectangulaire contenant un liquide soumis à un gradient thermique horizontal par le biais des parois verticales maintenues à des températures différentes  $T_c$  à gauche et  $T_f$  à droite, le fond et la surface libre étant considérés comme adiabatiques (c.f. section 3.4). Ce problème étant souvent utilisé comme exemple académique pour discuter l'effet des forces de Marangoni, il constitue un cadre propice à l'étude d'une modélisation étendue aux phénomènes de viscosité interfaciale et de glissement. D'autre part, une des principales applications est la stabilité des écoulements dans les procédés de croissance cristalline. La cuve différentiellement chauffée est très proche du modèle de demi-zone en l'absence de gravité et de déformation de l'interface, ce qui rend les résultats obtenus directement exploitables.

Dans ce qui suit, l'effet d'un filtrage polynômial sur la régularité des écoulements est d'abord examiné. La dissipation de l'interface est ensuite ajoutée au bilan des forces à la surface libre. La régularité de l'écoulement est caractérisée. Des comparaisons avec les résultats numériques de Regnier *et al.* [120] sont présentées. Une singularité de divergence est mise en évidence. La nécessité de prendre en compte le glissement du fluide sur les parois solides conjointement à la viscosité interfaciale est discutée. La régularité des écoulements résultants est étudiée. Enfin un exemple d'écoulement dans du mercure pour lequel des ordres de grandeur des paramètres physiques sont disponibles [30, 146] est présenté.

Dans tout ce chapitre le rapport d'aspect  $A_H$  a été fixé égal à 2.



## 9.1 Régularité des solutions pour un filtre polynômial

La caractérisation de la régularité des solutions numériques obtenues à l'aide d'un filtre polynômial va servir de référence dans la suite de ce chapitre lorsque les effets de la viscosité interfaciale et du glissement seront introduits. Les filtres utilisés sont choisis dans la famille des polynômes  $f_n(x) = (1 - \frac{2x}{A_H} 2^n)^2$ . Les figures 9.1(a-b) représentent l'évolution du maximum de divergence relative sur le domaine avec le maillage. Sur la figure 9.1a le nombre de Prandtl est fixé à  $Pr = 1$ , le nombre de Marangoni à 1500, le pas de temps utilisé est  $dt = 10^{-4}$ . Sur la figure 9.1b différents nombre de Prandtl ont été testés. La convergence de la divergence est étudiée sur des écoulements stationnaires. Lorsque cela était possible le nombre de Marangoni a été gardé constant à une valeur de 1500.   Marangoni fixé, le nombre de Reynolds étant inversement proportionnel au nombre de Prandtl l'état périodique apparaît plus tôt pour les petites valeurs de Prandtl, ici  $Pr = 10^{-2}$ . C'est pourquoi le Marangoni est imposé à 500 pour  $Pr = 10^{-2}$ . En revanche le pas de temps est conservé égal à  $10^{-4}$ .

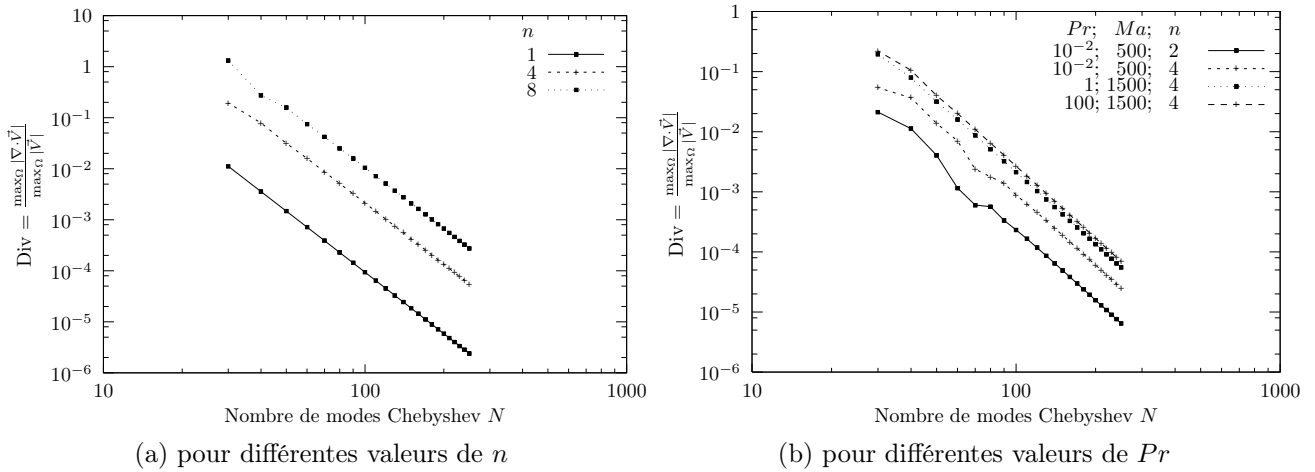


FIGURE 9.1 –  volution de la divergence avec le maillage.

Il apparaît immédiatement que la divergence ne décroît pas selon une exponentielle mais selon une puissance du nombre de modes de Chebyshev  $N$  :  $\frac{\max_{\Omega} |\nabla \cdot \vec{V}|}{\max_{\Omega} \|\vec{V}\|} = aN^{-b}$ . Les axes étant en échelle logarithmique la loi de puissance se traduit par des points alignés selon des droites. La pente de ces droites donnant la valeur de la puissance de  $N$ . Les droites correspondantes aux calculs effectués sont à première vue parallèles entre elles. Le taux de décroissance de la divergence  $b$  ne semble donc pas dépendre des paramètres de l'écoulement tel que le nombre de Prandtl et le nombre de Marangoni, ni de la longueur de filtrage imposée par le choix du paramètre de régularisation  $n$ .

Afin de préciser cette tendance la pente des droites est déterminée à l'aide de la fonction fit de Mathematica. Les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  correspondant à chaque valeur de  $Pr$ ,  $Ma$  et  $n$  pour lesquelles un calcul été effectué, ainsi que le nombre de points utilisés pour la régression

linéaire, sont regroupés dans le tableau 9.1. Les points éliminés sont systématiquement ceux correspondant aux maillages les plus grossiers. La lecture du tableau confirme que  $b$  ne dépend pas des valeurs prises par les paramètres et est égal à 4.

Coefficients de la loi de puissance : $\text{Div} = aN^{-b}$					
$Pr$	$Ma$	$n$	$a$	$b$	$N_p$
0,01	500	2	$e^{10,0}$	3,97874	10
0,01	500	4	$e^{11,3}$	3,97402	10
1	1500	1	$e^{9,1}$	3,99911	10
1	1500	4	$e^{12,2}$	3,99198	10
1	1500	8	$e^{13,8}$	3,98264	10
100	500	4	$e^{12,5}$	3,99239	10

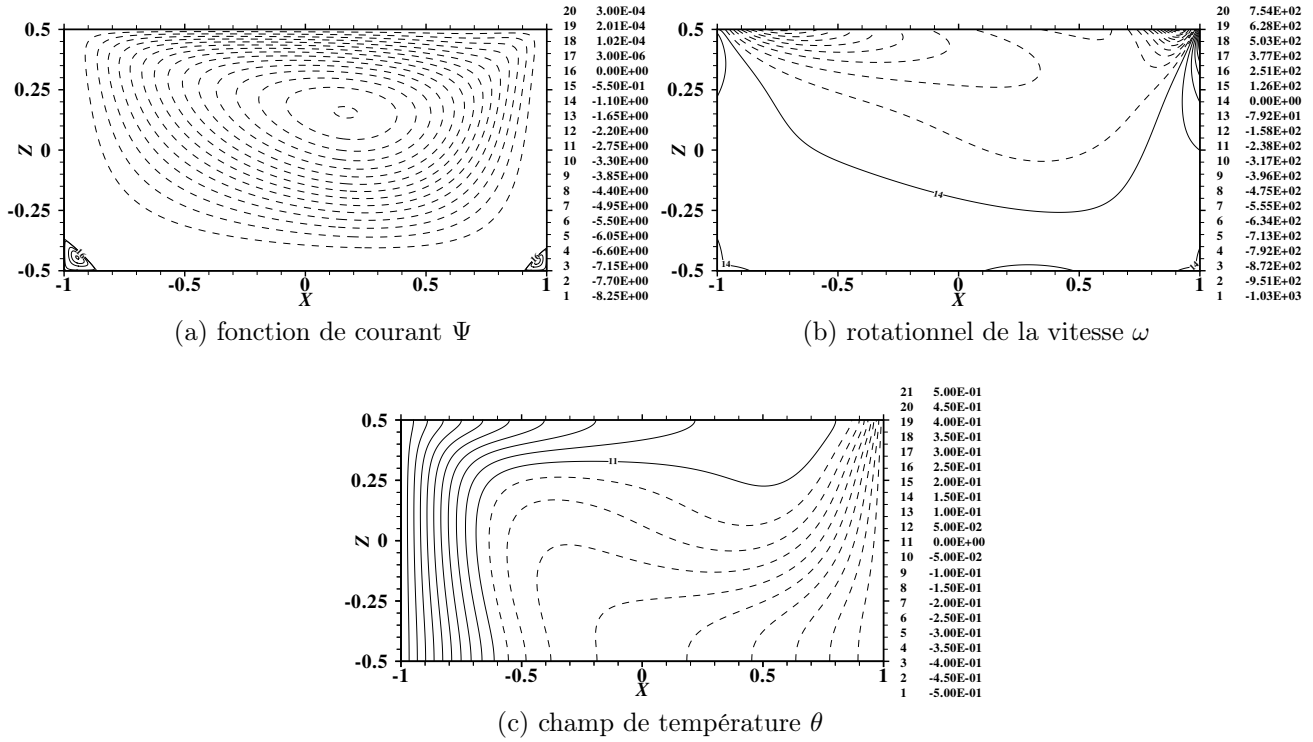
TABLE 9.1 – Taux de décroissance de la divergence en régularisation.

Dans le cas de la cavité entraînée l'emploi d'un filtre polynômial a permis d'observer la décroissance exponentielle de la divergence. Ici la divergence décroît au mieux comme  $N^{-4}$ . La principale différence tient dans la nature de la condition limite. En effet le mouvement du couvercle est décrit par une condition de Dirichlet, tandis que la contrainte thermocapillaire est une condition de Neumann. La petite échelle présente dans le coin froid résulte d'une rétroaction entre le cisaillement à la surface libre dû aux gradients thermiques et l'intensification des gradients thermiques par le mouvement convectif. Il est clair que la dynamique est beaucoup plus complexe dans le cas des écoulements thermocapillaires régularisés que dans celui de la cavité entraînée régularisée pour laquelle le profil de vitesse le long du couvercle est fixé. La présence de cette petite échelle de l'écoulement difficile à capturer pourrait être à l'origine de la perte de la décroissance exponentielle.

Les contours de la fonction de courant, les contours de vorticité et les isothermes sont représentés en figure 9.2, pour un écoulement à  $Pr = 1$ ,  $Ma = 1500$  et un paramètre de régularisation  $n = 4$ . Les données proviennent des calculs effectués pour étudier la décroissance de la divergence :  $dt = 10^{-4}$  et  $N_x = N_z = 200$ .

Sur la figure 9.2c les isothermes sont orthogonales à la surface libre et au fond de la cuve du fait de l'adiabaticité. Le long de la surface, les gradients thermiques les plus importants se situent au voisinage du coin froid. En effet la température adimensionnée  $\theta$  varie de 0 à  $\frac{1}{2}$  sur une zone voisine du coin de longueur  $\frac{A_H}{10}$ . Le gradient de température dans le coin chaud est, au contraire, atténué par la convection du champ de température. Dans la zone centrale de l'écoulement, le fluide se stratifie en température dans la direction verticale (froid en bas, chaud en haut). Enfin les isothermes sont repoussées le long de la paroi verticale chaude, pour  $z$  compris entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$ . La température varie alors de  $-\frac{1}{2}$  à zéro sur une distance de  $\frac{A_H}{5}$  de cette paroi.

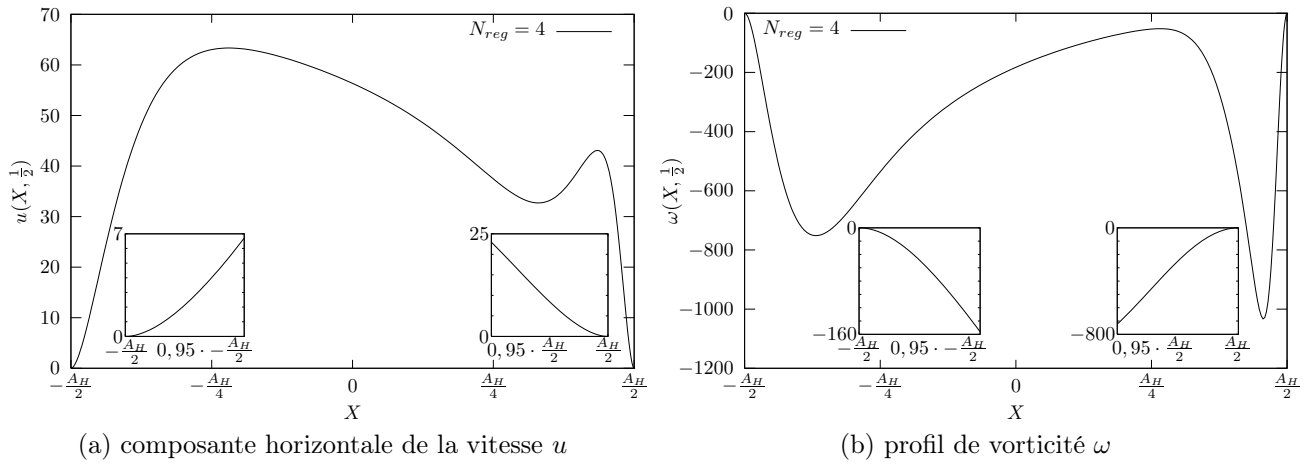
Les contours de la fonction de courant, en figure 9.2a, révèlent que l'écoulement s'organise en un rouleau principal de convection dans le sens anti-trigonométrique et deux cellules de recirculation apparaissant dans les coins inférieurs sous l'effet de l'inertie du fluide et de la

FIGURE 9.2 –  coulement à  $Ma = 1500$  pour  $Pr = 1$  et une régularisation  $n = 4$ .

condition de non-glissement.

La figure 9.2b, représentant les lignes iso-vorticité, montre la séparation de la cavité en deux zones principales correspondant aux valeurs de vorticité négatives, le long de la surface libre et aux valeurs positives près des parois solides. Le contour de vorticité 0 joint les coins chaud et froid, où a lieu le changement de signe (c.f. chapitre 2). La zone de vorticité négative est la zone de forçage de l'écoulement par la contrainte thermocapillaire. La zone de vorticité positive le long des parois solide caractérise le transfert de quantité de mouvement du fluide avec les parois par dissipation visqueuse. Les contours de vorticité sont particulièrement resserrées au voisinage du coin froid où se situe le maximum de vorticité en valeur absolue ainsi que les gradients thermiques les plus importants. Dans un voisinage restreint des coins inférieurs la vorticité devient à nouveau négative en raison des changement de sens de l'écoulement. Les transferts de quantité de mouvement avec les parois y demeurent de nature dissipative.

Il est aussi intéressant d'examiner le profil de la composante horizontale de la vitesse,  $u$ , le long de la surface libre (fig. 9.3a), ainsi que le profil de vorticité le long de la surface libre (fig. 9.3b). Le premier montre que la vitesse et sa dérivée suivant  $x$  s'annulent dans les coins. L'annulation de la dérivée dans les coins permet à la contrainte d'incompressibilité d'être vérifiée. En effet la condition de non-glissement le long des parois verticales se traduit sur  $w$  par  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , il est donc nécessaire d'avoir  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  pour que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ . Le profil de vitesse comporte deux maxima localisés au voisinage des coins. Les particules fluides sont fortement accélérées à

FIGURE 9.3 –  coulement le long de la surface libre ( $Ma = 1500$ ,  $Pr = 1$  et  $n = 4$ ).

ces deux endroits. La variation de vitesse à lieu sur une distance beaucoup plus courte pour le maximum du coin froid en raison du resserrement des isothermes (c.f. 9.2c).

Le second profile, représentant la vorticité, s'annule lui aussi dans les coins ainsi que sa dérivée suivant  $x$  (c.f. fig. 9.3b). Deux minima de vorticité existent au voisinage de chaque coin, la vorticité étant beaucoup plus faible (en valeur absolue) au centre de la surface libre. La vorticité étant directement proportionnelle au gradient thermique, celle-ci varie très fortement autour du minimum associé au coin froid, où les isothermes sont très resserrées.

## 9.2 Interface visqueuse

La régularisation va à présent être remplacée par les phénomènes locaux proposés pour lever la singularité. Dans le cas de la ligne de contact mobile, c' st le glissement qui est généralement invoqué pour rendre la contrainte intégrable. Cependant, dans le cas des écoulements thermo-capillaires, le point triple est fixe. La singularité provient de la contrainte de Marangoni qui ne s'annule pas dans les coins lorsqu'un gradient thermique subsiste :  $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ . Or le long des murs verticaux :  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$  car le fluide ne pénètre pas à travers. Pour une surface libre formant un angle droit il est possible d'écarter l'emploi du glissement seul en formulant le raisonnement suivant. Le glissement se situant sur les parois solides, il agit sur la composante verticale de vitesse sur les murs verticaux :  $\pm l_s \frac{\partial w}{\partial x} = w$ . Or il a été vu ci-dessus que la singularité est présente sur la dérivée verticale de la composante horizontale de la vitesse. Par conséquent, c' st d'abord la viscosité interfaciale qui est introduite dans le problème pour remplacer le filtrage. La condition de Marangoni à la surface libre devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} + Vi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La présence du terme dissipatif devrait permettre au cisaillement de s'annuler dans les coins en compensant le gradient thermique suffisamment près du coin.

**Remarque :**

En reprenant le raisonnement de la section 2.2.3 qui met en évidence la présence de la singularité des écoulements thermocapillaires il est possible de montrer que l'emploi du glissement seul ne lève pas la singularité pour une surface libre formant un angle quelconque avec la paroi solide. La démonstration est donnée en annexe B.

L'évolution de la divergence avec le maillage découle directement de la régularité de la solution et va donc fournir une mesure de l'efficacité du terme de dissipation visqueuse. Pour faciliter les comparaisons avec les solutions filtrées, les calculs sont effectués pour un nombre de Prandtl  $Pr = 1$ , un nombre de Marangoni  $Ma = 1500$ , avec un pas de temps  $dt = 10^{-4}$  et pour un paramètre de viscosité d'interface  $Vi = 10^{-1}$ . La valeur de  $Vi$  est arbitrairement choisie de telle manière que le profil de vitesse le long de la surface libre ne soit modifié que localement et au voisinage de forts gradients, c'est-à-dire pour ne pas trop altérer la dynamique. La figure 9.4, révèle que la divergence ne tend plus vers 0 avec le maillage mais au contraire converge vers une valeur constante. Les termes de viscosité d'interface ne suffisent pas à rendre le problème régulier. Plus le paramètre  $Vi$  est petit et plus la valeur limite de la divergence est grande. Le rôle du paramètre  $Vi$  a été discuté au chapitre précédent. Les cas limites  $Vi \rightarrow +\infty$  et  $Vi \rightarrow 0$  correspondent à une interface se comportant respectivement comme une paroi rigide ou comme une surface libre. Dans le premier cas il ne peut y avoir de mouvement à la surface libre ni de contrainte donc le fluide resterait au repos. La solution sera alors régulière de façon triviale. Dans le second cas la condition limite devient une condition de Marangoni non-filtrée : la singularité pollue fortement la solution numérique. Ceci explique la répartition relative des valeurs limites (en maillage) de la divergence pour les différentes valeurs de  $Vi$  employées.

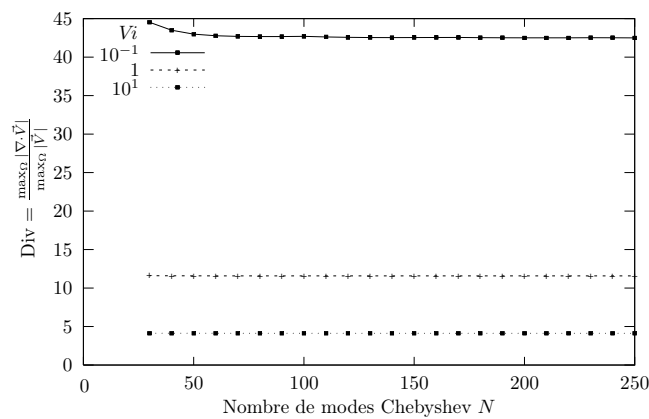


FIGURE 9.4 –  volution de la divergence avec le maillage.

### 9.2.1 Écoulement

Malgré l'échec de l'extension de la condition de Marangoni à la prise en compte d'une viscosité d'interface plusieurs points méritent d'être éclaircis. Quel est l'effet du terme de dissipation sur les écoulements ? Le comportement de la divergence découle-t'il de l'échec du traitement de la singularité de vorticité ? Peut-on remédier à cet état de faits ?

L'étude des champs de fonction de courant, rotationnel et température va permettre de mieux comprendre l'effet de la viscosité d'interface et donner des éléments de réponse aux questions énoncées.

La figure 9.5c représentant les isothermes dans la cuve est très proche de la figure 9.2c correspondant à la solution filtrée. La seule différence véritablement observable se situe au niveau du coin froid. L'isotherme correspondant à  $\theta = 0$  est un peu plus proche de ce dernier et les isothermes négatifs sont de plus en plus resserrés lorsque l'on se rapproche de la paroi. La viscosité d'interface semble moins atténuer les petites échelles que le filtrage polynômiale qui est encore relativement important pour  $n = 4$ .

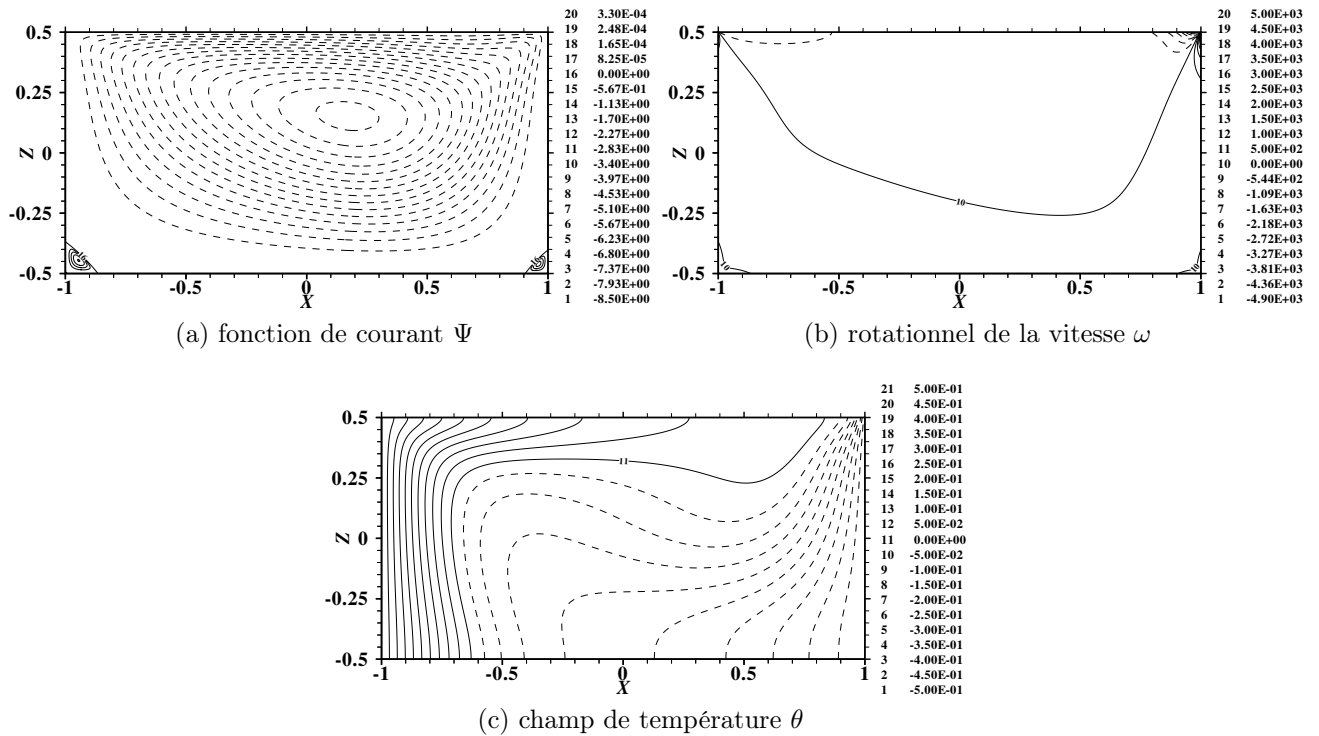


FIGURE 9.5 –   coulement à  $Ma = 1500$  pour  $Pr = 1$  et une viscosité interfaciale  $Vi = 10^{-1}$ .

Les contours de la fonction de courant (fig. 9.5a) sont eux aussi très semblables à ceux obtenus par filtrage. Il existe un rouleau principal ainsi que deux cellules de recirculation dans les coins inférieurs. Les différences se situent au niveau des valeurs extr  males de la fonction de courant et de la forme de la cellule principale. La fonction de courant varie environ de

$-8,25$  à  $3,3 \cdot 10^{-4}$  pour la viscosité d'interface, contre  $-8,25$  à  $3 \cdot 10^{-4}$  pour le filtrage. La structure convective principale est, elle, légèrement étirée dans le coin supérieur droit en raison du cisaillement localement plus important produit par le resserrement des isothermes.

Les contours de vorticité, représentés sur la figure 9.5b, font apparaître une très forte localisation des extrema. Le domaine est toujours séparé en deux zones principales : de vorticité négative, correspondant à l'entraînement par la surface libre et positive, pour la dissipation visqueuse par frottement sur les parois. Le contour de vorticité nulle joint toujours les deux coins supérieurs de la cuve. Seules les contours de vorticité dans les coins supérieurs sont visibles. Dans le reste du domaine les contours n'apparaissent pas sur la figure du fait de la différence d'échelle entre les valeurs de la vorticité dans les coins et ailleurs. Comme pour le filtrage, il existe deux zones de vorticité négative dans les coins inférieurs en raison de la présence des recirculations. Les valeurs extr males de la vorticité augmentent (en valeur absolue) par rapport au filtrage polynômial. Le minimum passe de  $-1 \cdot 10^3$  à  $-5 \cdot 10^3$  et le maximum de  $7,5 \cdot 10^2$  à  $5 \cdot 10^3$  soit près d'un ordre de grandeur pour ce dernier.

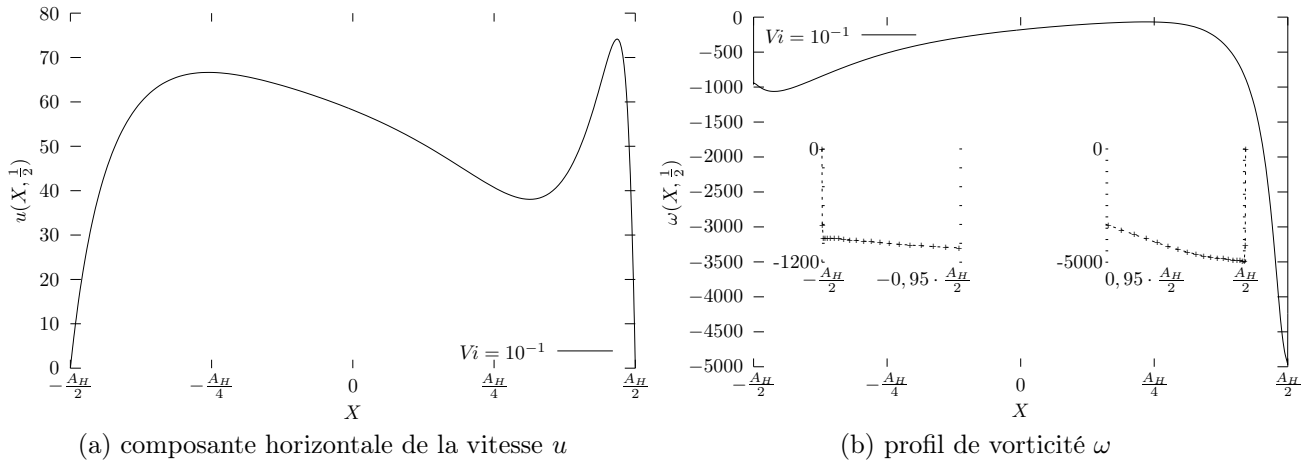
Les différences observées proviennent toutes de l'existence de petites échelles thermiques et donc du cisaillement dans le coin froid qui s'intensifient en raison du filtrage moins important par la viscosité interfaciale lorsque  $Vi = 10^{-1}$  que par le polynôme de régularisation lorsque  $n = 4$ .

L'effet du terme de viscosité interfaciale est plus facilement identifiable par l'examen des profils de vitesse horizontale et de vorticité le long de la surface libre. Le premier est représenté sur la figure 9.6a. Comme dans le cas du filtrage, la vitesse horizontale comporte deux maxima près des coins, cependant les particules fluides se déplacent plus vite au voisinage du coin froid. Le contraire avait été observé pour la régularisation. Le maximum du coin chaud reste compris entre 60 et 70, en revanche pour le coin froid il passe de l'intervalle  $[40, 50]$  à l'intervalle  $[70, 80]$ . Enfin une autre différence importante est que la dérivée suivant  $x$  de la composante horizontale de vitesse :  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ne s'annule plus dans les coins.

Concernant la vorticité (fig. 9.6b), il apparaît immédiatement que les deux minima près du coin chaud et froid ont augmenté en valeur absolue. Dans le coin chaud le maximum passe de  $-800$  à  $-1000$  tandis que dans le coin froid le maximum passe de  $-1000$  à  $-5000$ . La position de ceux-ci s'est fortement rapprochée des murs. Il est possible de voir sur la figure, dans les agrandissements, que les maxima se situent au troisième point de maillage en partant de chacun des murs pour un maillage de  $200 \times 200$ . Pour un maillage de  $250 \times 250$  les maxima se situent encore sur le troisième point. Ceci semble indiquer que la viscosité d'interface ne parvient pas à compenser à elle seule le gradient thermique ou encore que l'échelle à laquelle le filtrage se fait est trop fine pour être capturée par un maillage de  $250 \times 250$ .

### 9.2.2 Singularité de divergence

Il est possible de comprendre l'origine de la singularité examinant les conditions aux limites et leur compatibilité avec les équations du problème. Le long de la surface libre la condition de Marangoni étendue s'applique. Le gradient thermique local est négatif sur toute la surface. En touchant le coin la vorticité s'annule. Le terme de dérivée seconde de la vitesse vérifie alors

FIGURE 9.6 –  coulement le long de la surface libre ( $Ma = 1500$ ,  $Pr = 1$  et  $Vi = 10^{-1}$ ).

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{Ma}{Vi} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . La dérivée seconde est reliée à la courbure du profil de vitesse par la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{[1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Le gradient thermique étant négatif la dérivée seconde est négative et la courbure étant de même signe le profil dans les coins à sa concavité tournée vers le bas (comme pour  $-x^2$ ). La condition de non-glisement implique que la composante verticale de la vitesse le long des parois verticales est identiquement nulle. Il en résulte que  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  le long des parois verticales et en particulier dans les coins chaud et froid. En invoquant la contrainte de divergence nulle (i.e.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ) qui doit être respectée dans tout le domaine, il s'avère que  $u$  doit vérifier  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  dans les coins et donc dans les coins chaud et froid. En supposant que toutes les conditions énoncées précédemment soient vraies le profil de vitesse s'annulant dans les coins  $u$  doit être négative sur une certaine distance à partir du coin traduisant l'existence d'un mouvement contraire à celui résultant d'une contrainte thermocapillaire issue de gradients thermiques négatifs, comme illustré par la figure 9.7a. L'existence d'une telle cellule de recirculation est contraire à l'intuition. Le mouvement dans le fluide provenant des forces de Marangoni la vitesse est nécessairement plus importante à la surface libre que dans le volume donc une vitesse horizontale dirigée vers la gauche engendrerait un cisaillement négatif que seule la dissipation de la surface permettrait. En effet le gradient thermique est négatif en tout point de la surface libre résultant en un cisaillement positif. Or il semble difficile d'envisager qu'un terme dissipatif puisse devenir supérieur à la cause qui l'engendre. D'autre part la possibilité que des effets inertiels puissent engendrer les recirculations peuvent aussi être écartés. En effet, ils ne justifient pas l'existence des recirculations aux coins chaud et froid pour les très faibles nombre de Marangoni conduisant à de très faibles vitesses.

Le profil de vitesse 9.6a montre que la dérivée horizontale de la vitesse ne s'annule pas aux jonctions de la surface libre avec les parois verticales. Ceci suggère de reprendre le raisonnement



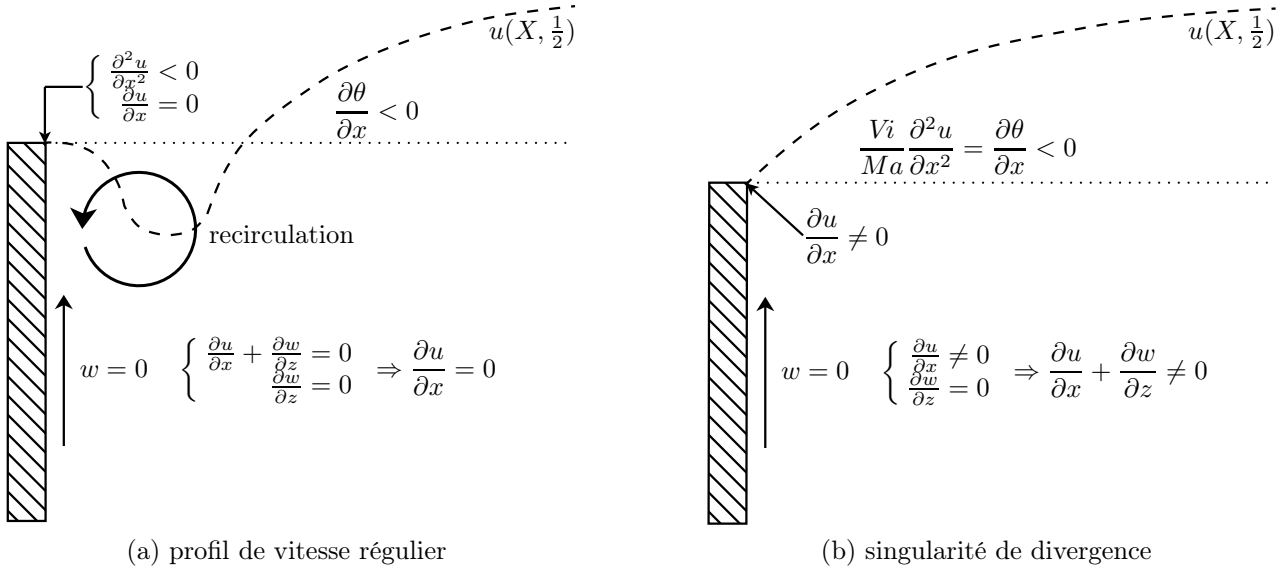


FIGURE 9.7 – Origine de la singularité de divergence.

précédant sans imposer  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . La conclusion est immédiatement que la divergence ne peut s'annuler dans les coins, comme résumé par la figure 9.7b. Si le profil de vitesse le long de la surface libre est régulier et que celle-ci s'annule dans les coins, en revanche la vorticité et la divergence sont singulières dans les coins.

### 9.2.3 Comparaisons avec les résultats de Régnier, Parmentier, Lebon et Platten

La configuration de cuve thermocapillaire peut être ramenée à celle décrite dans l'article de Regnier *et al.* [120], qui introduit la viscosité interfaciale dans la condition de Marangoni. Pour cela les conditions d'adiabaticité du fond et de la surface libre sont remplacées par une répartition linéaire de la température. En incluant la poussée d'Archimède, la configuration décrite est celle d'une seule couche d'un liquide différentiellement chauffée dans la publication citée plus haut. Un nouveau paramètre adimensionnel tenant compte des forces en volume intervient : le nombre de Rayleigh défini comme  $Ra = \frac{\rho_0 \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ . Des calculs en formulation spectrale sont effectués à l'aide de l'algorithme de diagonalisation par blocs. Les valeurs choisies pour les différents paramètres sont  $Ra = 2000$ ,  $Pr = 1000$ ,  $Ma = 100$ , qui correspond à une huile de silicone. Le rapport d'aspect  $A_H$  est varié de 1 à 10 et la viscosité interfaciale  $Vi$  de  $10^{-3}$  à  $10^4$ . Le maillage utilisé est de  $N_x = 80$  et  $N_z = 20$  et le pas de temps  $dt = 10^{-3}$ .

Le tableau 9.2 reproduit les résultats de l'article de Regnier *et al.* qui proviennent d'un code en différences finies employant le même nombre de points de maillage. Le tableau 9.3 résume les résultats obtenus à l'aide du code spectral basé sur la diagonalisation par blocs. Les valeurs limites de  $Vi$  : 0 et  $+\infty$ , sont remplacées par  $10^{-3}$  et  $10^4$  de manière à toujours résoudre les

équations avec le terme dissipatif. Enfin, le tableau 9.4 regroupe les valeurs du maximum de divergence et de divergence relative associées aux résultats du tableau 9.3.

L'observation du tableau 9.2 permet de comprendre le rôle du terme dissipatif. La viscosité interfaciale indique la rigidité de celle-ci devant les dilatations et compressions résultant de la dynamique de l'écoulement. Lorsque  $Vi \rightarrow +\infty$  la réponse de l'interface est instantanée et elle peut être considérée comme une paroi solide. Ceci se traduit par l'annulation du maximum de la composante horizontale de vitesse sur la surface libre :  $\max_{S.L.} u = 0$  et de plus faibles valeurs de l'énergie cinétique totale (il y a plus d'énergie dissipée). L'énergie cinétique n'est pas nulle car la poussée d'Archimède suffit à mettre le fluide en mouvement :  $Ra = 2000$ . Pour  $A_H$  fixé, si  $Vi$  décroît, la vitesse interfaciale et l'énergie cinétique augmentent. Les plus grandes valeurs étant obtenues lorsque  $Vi = 0$ . L'interface se comporte alors comme une surface libre (aux forces de Marangoni près). Pour  $Vi = 0$  et 1, l'énergie cinétique et la vitesse décroissent lorsque  $A_H$  croît. En effet, un accroissement du rapport d'aspect fait décroître le gradient thermique local à la surface libre qui vaut :  $\frac{\Delta T}{A_H} H$ . Par conséquent la contrainte de cisaillement diminue, la vitesse à la surface libre diminue et il y a moins d'énergie injectée dans la cavité. Pour  $Vi = 10$ , l'énergie cinétique décroît lorsque  $A_H$  croît mais c'est le contraire pour le maximum de vitesse le long de la surface libre. Ceci est dû à l'augmentation de la taille de l'interface. Lorsque  $A_H$  augmente à  $Vi$  fixé, le temps de réponse de l'interface est constant mais la distance sur laquelle l'information se propage augmente (la longueur de l'interface  $L$ ).

$Vi$	$L/d$									
	1		2		4		6		10	
	$E_c$	$\max_{S.L.} u$	$E_c$	$\max_{S.L.} u$	$E_c$	$\max_{S.L.} u$	$E_c$	$\max_{S.L.} u$	$E_c$	$\max_{S.L.} u$
0	49,80	18,52	47,18	15,11	31,40	11,79	20,49	9,39	9,77	6,35
1	28,68	9,35	34,05	12,11	26,19	10,94	18,06	8,93	9,06	6,22
10	19,15	1,08	16,38	3,85	13,03	6,25	10,53	6,67	6,51	3,57
$\infty$	18,33	0	13,25	0	5,83	0	3,04	0	1,20	0

TABLE 9.2 – Énergie cinétique intégrée dans le volume et maximum de la composante de horizontale de vitesse sur la surface libre. Résultats en différences finies obtenus par Regnier *et al.* [120].

Les résultats du code spectral (tab. 9.3), sont en bon accord avec ceux décrits précédemment. On retrouve les mêmes ordres de grandeurs pour l'énergie cinétique et le maximum de vitesse à la surface libre. Pour  $Vi = 10^{-4}$ , l'énergie cinétique intégrée est minimale et le maximum de vitesse le long de la surface libre est quasiment nulle : de l'ordre de  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Pour  $Vi \geq 10$  la vitesse augmente lorsque  $A_H$  croît. Ceci autorise de plus grandes fluctuations de vitesse sans changer le gradient local, et explique les variations du maximum de vitesse. Les valeurs obtenues en spectral sont toujours supérieures à celles obtenues en différences finies. Ceci provient certainement du caractère intrinsèquement dissipatif de la formulation différence finie qui atténue l'énergie injectée dans le domaine, tandis que les méthodes spectrales sont par définition non-dissipatives.

$V_i$	$L/d$									
	1		2		4		6		10	
	$E_c$	$\max u_{S.L.}$	$E_c$	$\max u_{S.L.}$	$E_c$	$\max u_{S.L.}$	$E_c$	$\max u_{S.L.}$	$E_c$	$\max u_{S.L.}$
$10^{-3}$	65,33	24,18	82,73	24,08	45,06	15,97	24,11	11,07	9,68	6,67
$10^{-2}$	64,66	23,93	82,33	24,02	44,97	15,96	24,09	11,07	9,67	6,67
$10^{-1}$	58,89	21,73	78,61	23,33	44,13	15,90	23,82	11,06	9,61	6,67
1	36,61	11,39	55,46	17,46	37,56	14,87	21,66	10,89	9,13	6,67
10	23,41	7,19	24,07	8,22	16,90	7,50	12,33	7,65	6,74	6,06
$10^2$	21,70	0,21	17,91	0,56	7,65	1,21	4,42	1,71	2,48	2,33
$10^3$	21,53	0,02	17,29	0,06	6,63	0,13	3,30	0,19	1,34	0,32
$10^4$	21,51	0,002	17,22	0,006	6,53	0,01	3,19	0,02	1,23	0,03

TABLE 9.3 – Évolution du maximum de vitesse à l'interface et de l'énergie cinétique intégrée dans le volume avec le rapport d'aspect et la viscosité interfaciale, résolution spectrale.

$V_i$	$L/d$							
	1		2		4		...	
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$		
$10^{-3}$	$-2,05 \cdot 10^2$	-8,50	$-1,03 \cdot 10^2$	-4,27	$-4,95 \cdot 10^1$	-3,10		
$10^{-2}$	$-9,40 \cdot 10^1$	-3,92	$-4,79 \cdot 10^1$	-2,00	$2,40 \cdot 10^1$	1,50		
$10^{-1}$	$-7,12 \cdot 10^1$	-3,30	$-4,04 \cdot 10^1$	-1,73	$2,06 \cdot 10^1$	1,30		
1	$-4,00 \cdot 10^1$	-3,52	$-3,16 \cdot 10^1$	-1,81	$1,82 \cdot 10^1$	1,22	...	
10	-7,12	$-9,60 \cdot 10^{-1}$	-8,48	-1,03	7,31	$9,44 \cdot 10^{-1}$		
$10^2$	$-7,70 \cdot 10^{-1}$	$-1,08 \cdot 10^{-1}$	-1,02	$-1,43 \cdot 10^{-1}$	-1,1	$-2,59 \cdot 10^{-1}$		
$10^3$	$-7,77 \cdot 10^{-2}$	$-1,09 \cdot 10^{-2}$	$-1,04 \cdot 10^{-1}$	$-1,48 \cdot 10^{-2}$	$-1,19 \cdot 10^{-1}$	$-2,95 \cdot 10^{-2}$		
$10^4$	$-2,34 \cdot 10^{-2}$	$-3,30 \cdot 10^{-3}$	$-1,04 \cdot 10^{-2}$	$-1,49 \cdot 10^{-2}$	$-1,19 \cdot 10^{-2}$	$-3,00 \cdot 10^{-3}$		

...	$L/d$			
	6		10	
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$
	$-2,98 \cdot 10^1$	-2,69	$-1,36 \cdot 10^1$	-2,05
	$1,59 \cdot 10^1$	1,44	9,34	1,40
	$1,37 \cdot 10^1$	1,24	8,16	1,22
...	$1,22 \cdot 10^1$	1,12	7,26	1,09
	5,65	$7,39 \cdot 10^{-1}$	3,57	$5,89 \cdot 10^{-1}$
	-1,10	$-3,36 \cdot 10^{-1}$	$9,56 \cdot 10^{-1}$	$3,59 \cdot 10^{-1}$
	$-1,23 \cdot 10^{-1}$	$-4,49 \cdot 10^{-1}$	$-1,24 \cdot 10^{-1}$	$-7,27 \cdot 10^{-2}$
	$-1,24 \cdot 10^{-2}$	$-4,64 \cdot 10^{-3}$	$-1,27 \cdot 10^{-2}$	$-7,90 \cdot 10^{-3}$

TABLE 9.4 – Évolution des maxima dans la cavité de la divergence et de la divergence relative avec le rapport d'aspect et la viscosité interfaciale.

Le dernier tableau (9.4), illustre la discussion précédente sur l'origine de la singularité et la contrainte de divergence nulle. Cette dernière n'est pas respectée à la surface libre dans les coins chaud et froid. Les fortes valeurs de  $Vi$  améliorent la situation car le problème se rapproche de la cavité différentiellement chauffée. La condition  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  étant naturellement satisfaite à la jonction de deux parois solides non-glissantes.

## 9.3 Interface visqueuse et glissement

Dans la section précédente nous avons montré que la viscosité interfaciale atténue les gradients de vitesse et le cisaillement. Cependant, elle ne suffit pas à elle seule à lever la singularité de vorticité qui se reporte en partie sur la contrainte de divergence nulle qui est mise en défaut aux jonctions de la surface libre avec les parois solides. Il reste à discuter la possibilité de lever la contradiction avec l'incompressibilité du fluide.

### 9.3.1 Analyse a priori de l'effet d'un glissement sur la divergence

Dans les paragraphes précédents, l'introduction de deux phénomènes locaux, le glissement et la viscosité d'interface, a été envisagée pour régulariser physiquement l'écoulement dans les coins chaud et froid. Le premier a été écarté en première approche. Le second s'est révélé insuffisant. Pour trouver un remède à la singularité de divergence, il est nécessaire de reprendre la discussion sur la compatibilité des contraintes imposées au fluide aux points singuliers. La discussion (c.f. Fig. 9.7b) a fait apparaître que la grandeur  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est non nulle le long de la surface libre sur un certain voisinage de chacun des coins. La condition de non glissement le long des murs conduit à écrire  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  sur toute la longueur des parois et donc aux coins la divergence ne peut s'annuler :  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ . C'est pourquoi la prise en compte du glissement sur les parois est reconsidérée. La condition de glissement  $\mp l_s \frac{\partial w}{\partial x} = w$  va remplacer  $w = 0$  respectivement sur les parois de gauche et de droite. La vitesse verticale n'étant plus identiquement nulle le long des parois verticales sa dérivée suivant  $z$  pourra être non-nulle et en particulier dans les coins, la contrainte de divergence nulle devrait imposer  $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$  pour que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ . La résolution numérique d'une configuration où la viscosité interfaciale et le glissement sont pris en compte simultanément a été décrite au chapitre précédent et n'a pas révélé d'incompatibilité entre ces deux effets.

### 9.3.2 Comportement de la divergence et des grandeurs globales intégrées

L'attention est maintenant portée sur la régularité des écoulements non filtrés soumis aux effets conjoints du glissement et de la viscosité de l'interface. Afin de limiter la discussion, la viscosité d'interface est fixée à  $Vi = 10^{-1}$ , de manière à n'atténuer les variations de  $u$  que très localement. Le paramètre de glissement  $l_s$  est lui varié de  $10^{-1}$  (glissement important)    $10^{-3}$  (glissement très faible). Les autres paramètres physiques et numériques sont inchangés pour

permettre les comparaisons :  $Pr = 1$ ,  $Ma = 1500$ ,  $\delta t = 10^{-4}$ .

L'observation du comportement de la divergence avec l'évolution du maillage, représenté en figure 9.8 fournit un critère de régularité. Pour les trois valeurs de  $l_s$  employées la divergence tend vers 0 avec l'augmentation du nombre de points du maillage.   maillage fixé la divergence est d'autant plus grande que la longueur de glissement est petite. Pour  $l_s = 10^{-1}$  et  $10^{-2}$  la divergence décroît selon une droite. Pour  $l_s = 10^{-3}$  la divergence se rapproche d'une droite seulement pour les maillages les plus raffinés (  partir de  $N \simeq 200$ ). Le comportement de décroissance exponentielle attendu pour les méthodes spectrales n'est pas observé. La divergence étant reportée en échelle log / log sur la figure, le caractère linéaire du tracé révèle que la divergence obéit à une loi de puissance du type :  $\text{Div} = aN^{-b}$ . Les trois droites semblent avoir la même pente dans la limite des grands  $N$ .

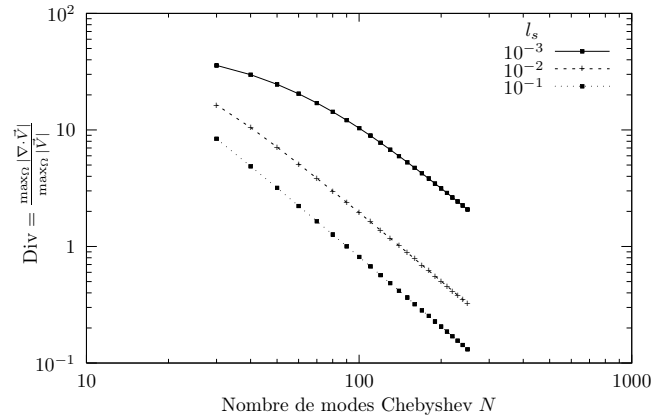


FIGURE 9.8 –  volution de la divergence avec le maillage.

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont déterminés par une régression linéaire en échelle log / log à l'aide de la fonction Fit de Mathematica. Les résultats sont regroupés dans le tableau 9.5. La pente de la divergence ne dépend pas de la longueur de glissement et est égale à -2. Ceci se rapproche du comportement observé dans le tableau 9.1 lorsque le paramètre de régularisation  $n$  varie, tout autre paramètre étant fixé. La pente semble donc être une caractéristique physique du problème liée au traitement de la singularité par la viscosité d'interface et le glissement. Il

Coefficients de la loi de puissance : $\text{Div} = aN^{-b}$						
$Pr$	$Ma$	$Vi$	$l_s$	$a$	$b$	$N_p$
1	1500	0,1	$10^{-1}$	$e^{9,0}$	1,99505	10
1	1500	0,1	$10^{-2}$	$e^{9,8}$	1.98039	7
1	1500	0,1	$10^{-3}$	$e^{11,0}$	1.86706	7

TABLE 9.5 – Taux de décroissance de la divergence.

serai nécessaire de compléter ces résultats par des calculs pour d'autres valeurs du paramètre de viscosité interfaciales  $Vi$ , du nombre de Prandtl  $Pr$ , et du nombre de Marangoni  $Ma$ , pour

pouvoir conclure sur le caractère intrinsèque de la décroissance de la divergence. Néanmoins, il est intéressant de souligner que si l'association de la viscosité interfaciale et du glissement ne donne pas une solution régulière (c'est-à-dire infiniment dérivable), la divergence décroît selon une loi de puissance tout comme pour la régularisation. La puissance associée au filtrage polynômial est de -4 tandis que celle associée au traitement physique de la singularité est de -2. Ceci n'est guère surprenant si l'on considère que le filtrage est beaucoup moins complexe dans sa mise en œuvre que ne l'est le traitement physique. Ce dernier nécessite l'introduction de termes de dérivées partielles supplémentaires sur toute les frontières dont un terme en dérivée seconde dont l'impact sur la propriétés mathématiques des solutions est mal connu.

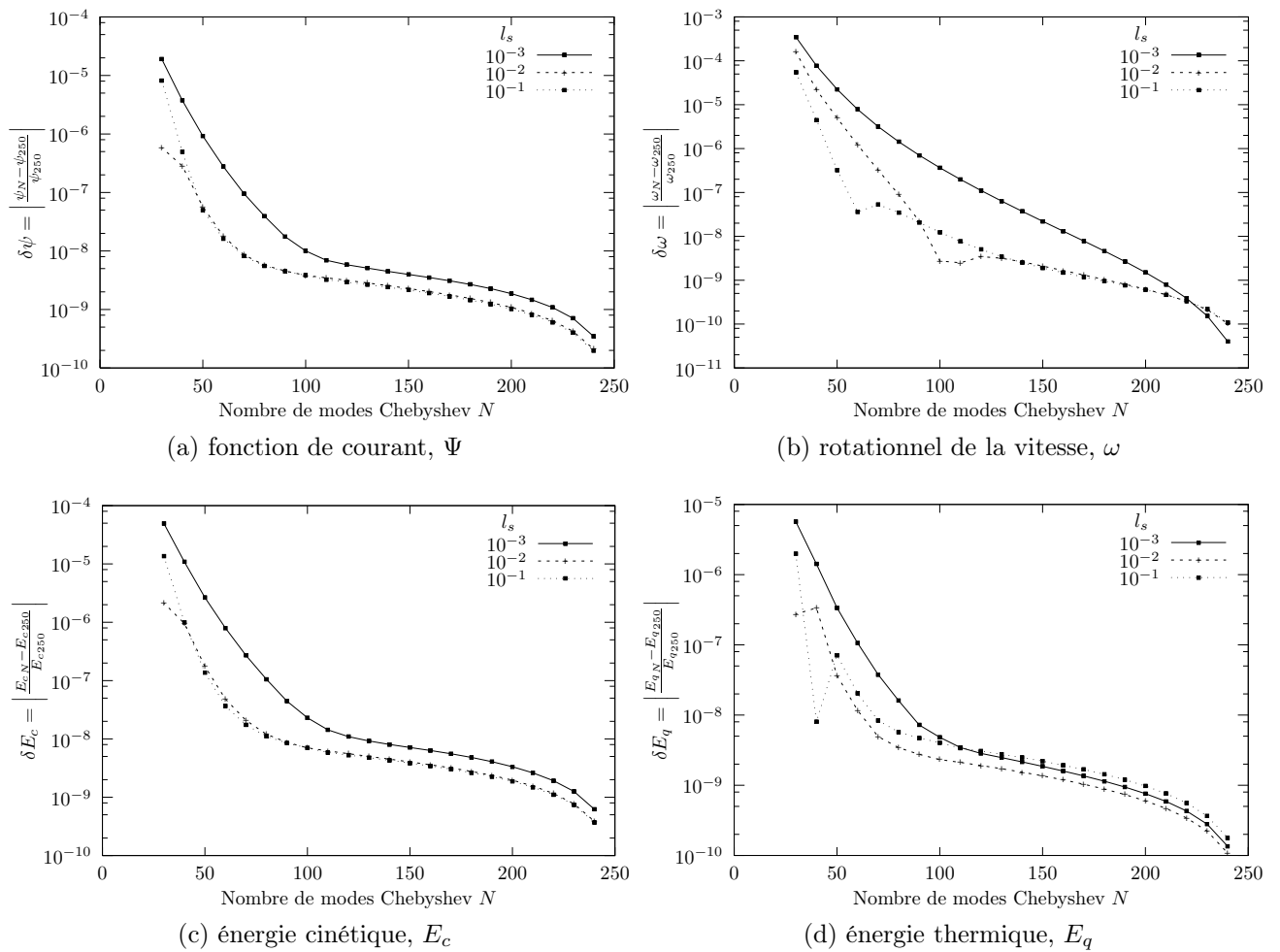


FIGURE 9.9 – Évolution des valeurs globales avec le maillage, pour  $l_s = 10^{-3}, 10^{-2}$  et  $10^{-1}$ .

Pour terminer la caractérisation de la convergence des solutions obtenues par le traitement physique de la singularité, l'évolution avec le maillage de l'écart relatif de différentes grandeurs globales de l'écoulement par rapport à leur valeur de référence pour  $250 \times 250$  est présentée et discutée. Les grandeurs globales  $\Psi$ ,  $\omega$ ,  $E_c$  et  $E_q$ , se réfèrent respectivement à la norme  $L_2$

(c.f. chapitre 6 page 105) de la fonction de courant, du rotationnel de la vitesse, de l'énergie cinétique et de l'énergie thermique. L'utilisation de la norme  $L_2$  permet les comparaisons pour deux maillages différents. La figure 9.9 regroupe les tracés des variations des quatre grandeurs étudiées en échelle lin/log.

Pour toutes les grandeurs étudiées l'écart relatif à la valeur de référence décroît avec le maillage, et ce pour les trois valeurs prises par  $l_s$ . Les courbes relatives à la fonction de courant (fig. 9.9a) et à l'énergie cinétique (fig. 9.9c) sont tout à fait semblables. Au delà de  $N = 50$ , pour un maillage donné, la courbe correspondant à  $l_s = 10^{-3}$  est au dessus de celle correspondant à  $l_s = 10^{-2}$  elle-même au dessus de la dernière. Il existe une zone de décroissance rapide jusqu'à environ  $N = 100$  au delà de laquelle la décroissance devient beaucoup plus faible. Pour le rotationnel de la vitesse (9.10b), la zone de forte décroissance se décale vers les maillages raffinés quand  $l_s$  diminue. Elle se termine à  $N = 50$  lorsque  $l_s = 10^{-1}$ ,  $N = 100$  lorsque  $l_s = 10^{-2}$  et ne semble pas être terminée à  $N = 250$  pour  $l_s = 10^{-3}$ . Il est par conséquent difficile d'affirmer quoique ce soit sur les position relatives des courbes. Enfin le comportement de l'énergie thermique est quelque peu surprenant (c.f. figure 9.10c). La zone de forte décroissance se termine vers  $N = 100$ , cependant la position relative des courbes dans la zone de décroissance linéaire ne dépend pas simplement de la valeur de  $l_s$  comme c'est le cas pour la fonction de courant ou l'énergie cinétique. Si la courbe correspondant à  $l_s = 10^{-2}$  est bien au dessus de celle correspondant à  $l_s = 10^{-1}$ , le courbe obtenue pour  $l_s = 10^{-1}$  vient s'intercalé entre les deux précédentes. Ceci indique que comme dans le cas de la cavité entraînée (voir chapitre 7) la présence d'un glissement aux parois solides peut avoir des effets non-triviaux sur les écoulements thermocapillaires.

### 9.3.3  coulement

La régularité des solutions obtenues pour un traitement physique de la singularité par la prise en compte de la viscosité de l'interface et du glissement du fluide sur les parois a été discuté en détails. C'est à présent l'influence du traitement physique sur les écoulements qui va être étudié. Dans ce but, les contours de la fonction de courant, de la vorticité, les isothermes et le profil de vorticité le long de la surface libre sont représentés en figure 9.10. Les profils de la composante horizontale de vitesse le long des parois horizontales et de la composante verticale de vitesse le long des parois verticales sont aussi intéressants car ils mettent en évidence la présence du glissement. Ils sont présentés en figure 9.11. Les paramètres utilisés pour les calculs sont  $Pr = 1$ ,  $Ma = 1500$ ,  $Vi = 10^{-1}$ ,  $l_s = 10^{-3}$  qui correspond à l'ordre de grandeur attendu dans un cas réel et  $dt = 10^{-4}$ . Ceci pour rester consistant avec les calculs précédents en régularisation et viscosité interfaciale seule, ce qui va permettre de comparer les champs obtenus.

Le champ de température (fig. 9.10c) est quasiment identique à celui obtenue pour la viscosité interfaciale seule (fig. 9.5c). Les isothermes sont très resserrées dans le coin froid, stratifiées horizontalement au centre et modérément resserrées le long de la paroi de gauche.

Les contours de vorticité (fig. 9.10b) sont très proches de ceux du cas où seule la viscosité de l'interface est prise en compte (fig. 9.5b). Le contour de vorticité nulle joint les coins chaud et froid et sépare le domaine en deux zones principales. La première relative aux vorticités

négatives résulte de l'entraînement du fluide par la surface libre. La seconde dans laquelle la vorticité est en général positive se rapporte aux frottements visqueux sur les parois solides. Bien qu'un glissement existe, la formulation de la condition de glissement impose qu'une certaine dissipation subsiste aux parois. Dans les coins inférieurs, les cellules de recirculation se traduisent par un changement du signe de la vorticité qui redevient négative. L'introduction du glissement résulte en une atténuation d'environ 30% du maximum de vorticité qui passe de 5000 à 3500. Le minimum de vorticité varie par contre assez peu ; il passe de  $-4900$  à  $-4500$ . Le minimum de vorticité provient de la contrainte thermocapillaire à la surface libre et dépend directement des échelles de gradient thermique dans le coin froid. Le glissement s'applique sur les parois solides et n'agit qu'indirectement sur les échelles présentes à la surface libre. En revanche, les valeurs positives de la vorticité provenant de la dissipation visqueuse le long des parois solides, la présence du glissement influence directement le maximum de vorticité en limitant les frottements, ceci même pour une valeur aussi faible de  $l_s$  que  $10^{-3}$ .

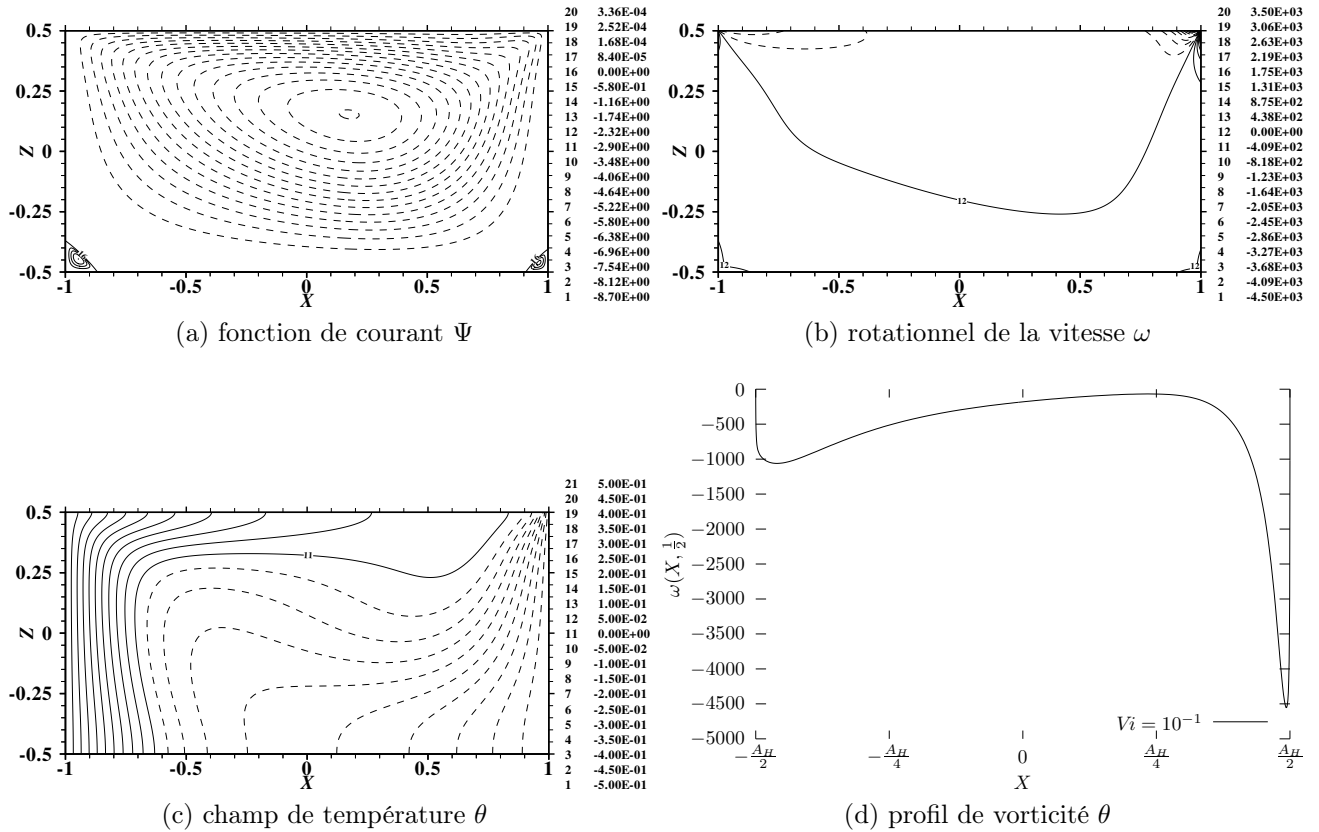


FIGURE 9.10 – Écoulement à  $Ma = 1500$  pour  $Pr = 1$ ,  $Vi = 10^{-1}$  et un glissement  $l_s = 10^{-3}$ .

La fonction de courant (fig. 9.10a) est elle aussi fortement ressemblante à celle obtenue pour la viscosité interfaciale seule (fig. 9.5a). Le rouleau principal engendré par le cisaillement à la surface libre occupe presque tout le domaine et correspond à un mouvement dans le sens



anti-trigonométrique. Deux cellules de recirculation sont présentes dans les coins inférieurs. La présence des petites échelles de cisaillement dans le coin froid induit un léger étirement des contours du rouleau principal vers le coin. Sous l'effet du glissement le long des parois solides le maximum de la fonction de courant augmente très légèrement de  $3,30 \cdot 10^{-4}$  en viscosité interfaciale seule à  $3,36 \cdot 10^{-4}$  et le minimum diminue lui aussi quelque peu de  $-8,5$  à  $-8,7$ . De la même manière que les extrema de vorticité sont atténués par le glissement, la plus faible dissipation d'énergie dans le domaine conduit à une légère amplification des extrema.

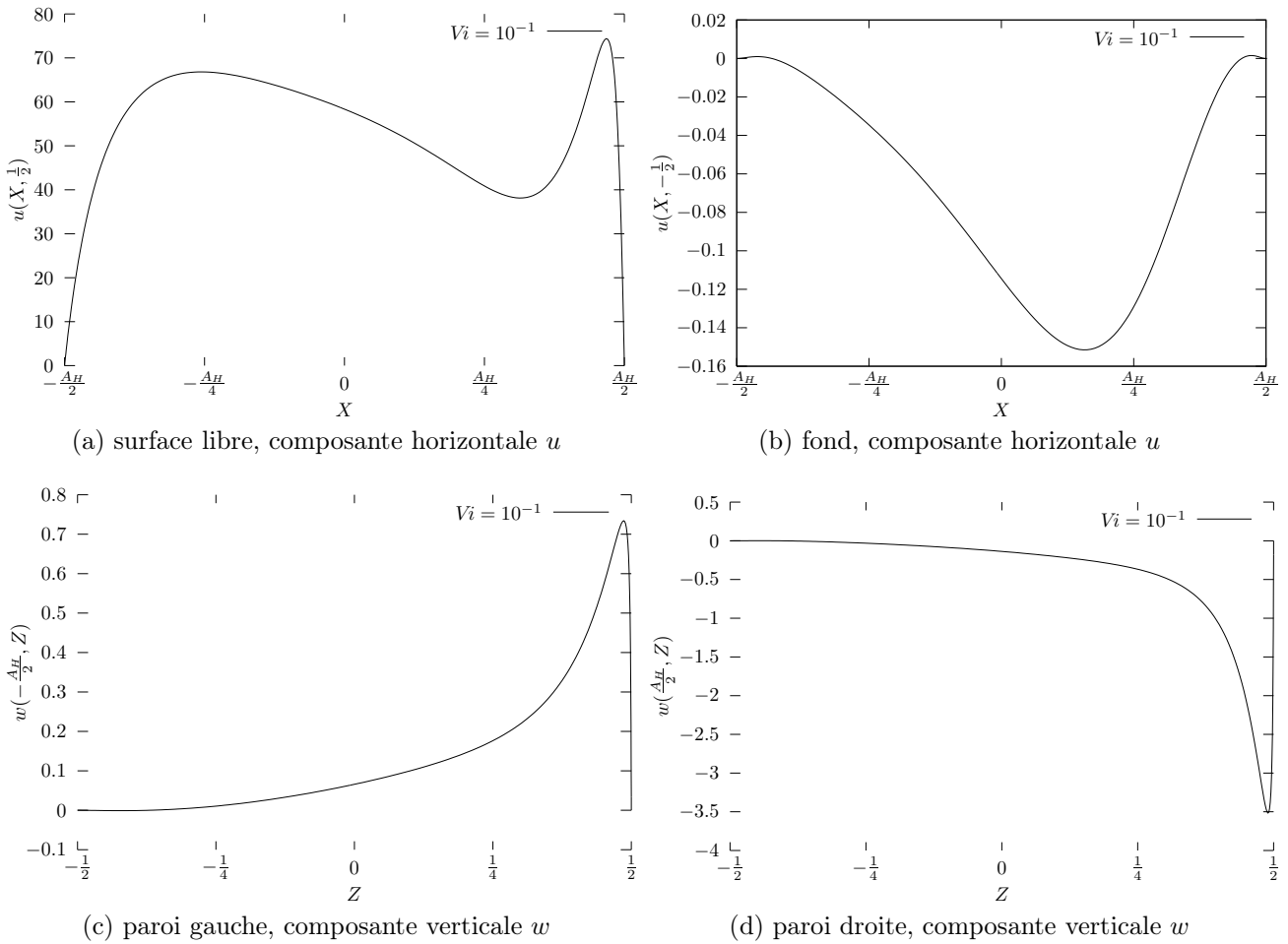


FIGURE 9.11 – Écoulement le long des frontières ( $Ma = 1500$ ,  $Pr = 1$ ,  $Vi = 10^{-1}$  et  $l_s = 10^{-3}$ ).

Le profil de vorticité le long de la surface libre (fig. 9.10d) met en évidence l'influence du glissement sur les échelles présentes. Celui-ci possède toujours deux minima comme dans le cas de la viscosité interfaciale seule (fig. 9.6b). Leur valeur n'est que très légèrement atténuée par la présence du glissement. En revanche la vorticité s'annule continûment dans les coins contrairement à ce qui a été observé lorsque seule la viscosité de l'interface est prise en compte (fig. 9.6b). Malgré tout, le gradient de vorticité dans les coins est très important car la position

des maxima est très rapprochée des parois.

Le profil de la composante de vitesse horizontale (fig. 9.11a) le long de la surface libre est encore une fois quasiment indiscernable de celui obtenu sans glissement (fig. 9.6a). Tout d'abord  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ne s'annule pas dans les coins. Ensuite, il comporte deux maxima près des coins chaud et froid compris dans les mêmes intervalles :  $[60, 70]$  du côté le plus chaud et  $[70, 80]$  du côté le plus froid.

Les profils de la composante verticale de la vitesse le long des parois verticales (figs. 9.11c et 9.11d) montre le glissement du fluide sur celles-ci :  $w$  n'y est plus identiquement nulle. Sur chaque paroi un pic de vitesse se forme au voisinage des coins chaud et froid. Ce pic est engendré par le départ du fluide du coin chaud et son impact sur le coin froid. La contrainte d'incompressibilité se traduit par un gradient de pression dirigé vers le bas depuis le coin chaud (le fluide est poussé vers le haut) et un gradient vers le haut au coin froid (le fluide est poussé vers le bas). Le profil de vitesse le long du fond (fig. 9.11b) découle de l'existence de la cellule principale et des recirculations dans les coins. La composante horizontale de vitesse  $u$  est négative au centre de la paroi et positive très localement dans les coins.

## 9.4  coulement dans du mercure

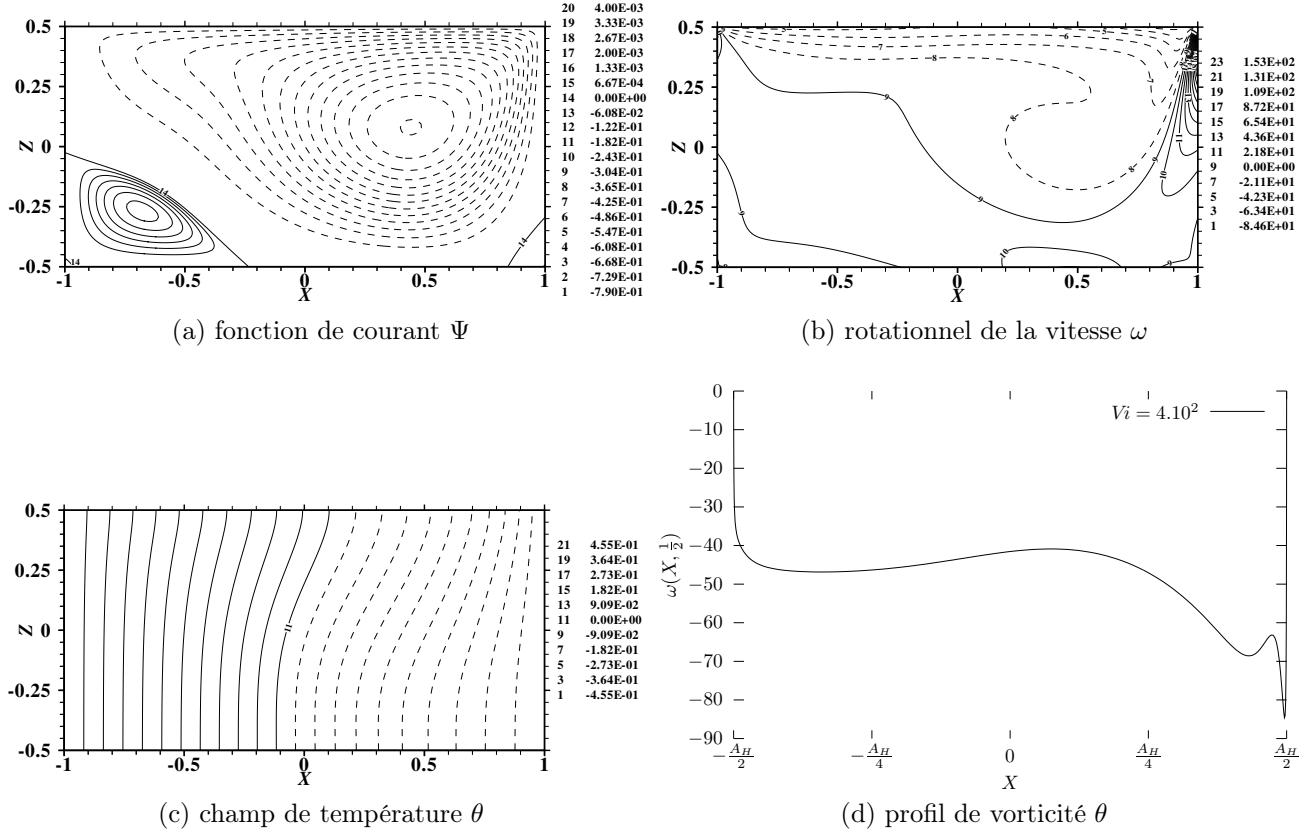


FIGURE 9.12 –  coulement à  $Ma = 100$  pour  $Pr = 2,6 \cdot 10^{-2}$ ,  $Vi = 4 \cdot 10^{-2}$  et un glissement  $l_s = 10^{-3}$ .

En utilisant les valeurs du nombre de Prandtl données dans Chénier [30, pp. 20-21] et les valeurs des coefficients de viscosité interfaciale données dans l'article de Vila *et al.* [146, p. 318], il est possible d'estimer les ordres de grandeur des différents paramètres physiques pour une cuve remplie de mercure. Le nombre de Prandtl est alors fixé à  $Pr = 2,6 \cdot 10^{-2}$ . La viscosité interfaciale dimensionnelle mesurée sur la base de la théorie de Goodrich vaut  $6 \cdot 10^{-4}$  sP (surface Poise :  $g \cdot s^{-1}$ ). En supposant que la viscosité correspondant à la théorie utilisée dans cette thèse est du même ordre de grandeur :  $\varepsilon \simeq 10^{-4}$ . En utilisant alors la valeur de la viscosité du mercure donnée dans la thèse de Chénier [30, pp. 20-21] :  $\mu = 1,5 \cdot 10^{-2} P$  et en considérant une cuve de 1 centimètre de profondeur, l'ordre de grandeur estimé du paramètre de viscosité interfaciale est  $Vi = \frac{\varepsilon}{\mu H} \simeq \frac{10^{-4} \text{sP}}{1,5 \cdot 10^{-2} P \times 1 \text{cm}} = 4 \cdot 10^{-2}$ .

Les figures 9.12 et 9.13 montrent à titre d'exemple les champs de température, fonction de courant et vorticité, ainsi que le profil de vorticité le long de la surface libre et les profils

de vitesse le long des frontières, pour un écoulement de mercure dans une cuve de 1 cm de profondeur et de rapport d'aspect 2 à un nombre de Marangoni égal à 100.

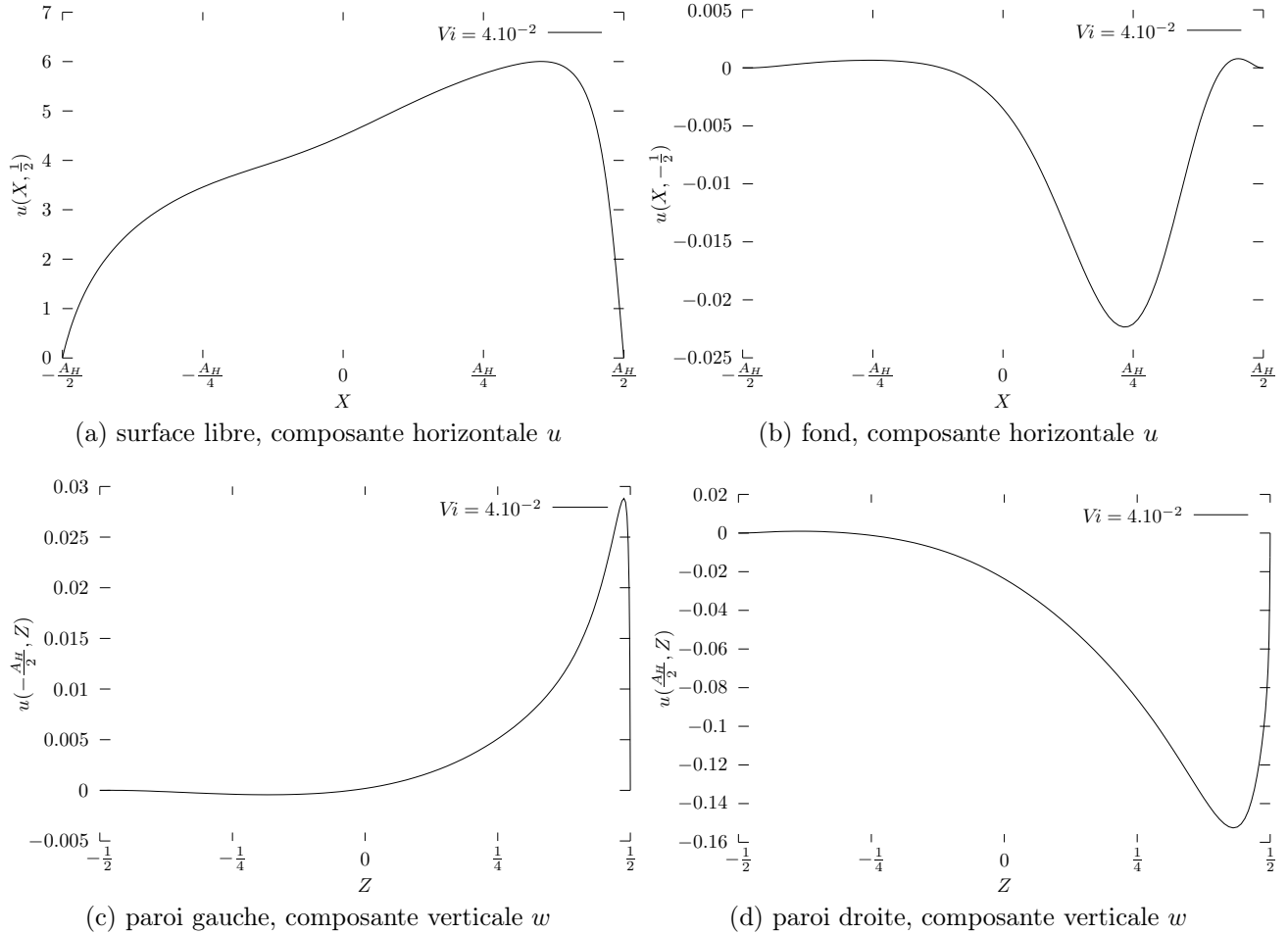


FIGURE 9.13 – Écoulement le long des frontières ( $Ma = 100$ ,  $Pr = 2, 6.10^{-2}$ ,  $Vi = 4.10^{-2}$  et  $l_s = 10^{-3}$ ).

## 9.5 Conclusion

L'étude des solutions numériques a révélé que le traitement physique de la singularité ne permet pas de retrouver la décroissance exponentielle de la divergence de la vitesse. Toutefois le filtrage ne décroît pas non plus exponentiellement. Lorsque les échelles à résoudre sont très fines il devient nécessaire d'augmenter le degré du polynôme de régularisation. Les thèses de Chénier [30], Kasperski [87], Bouizi [17] ont montré qu'un nombre de points de maillages d'autant plus grand devra être employé pour bien représenter le polynôme de régularisation. D'autre

part comme la divergence décroît en  $N^{-4}$ , il sera difficile d'être bien résolu spatialement. Le traitement physique de la singularité par prise en compte d'une viscosité d'interface et d'un glissement permet d'introduire directement les échelles pertinentes dans la mesure où les valeurs des paramètres  $V_i$  et  $l_s$  sont connus par des mesures. Il nécessite aussi l'emploi de maillages très raffinés. La divergence converge en  $N^{-2}$  ce qui est moins avantageux que la régularisation. Toutefois la différence de vitesse de décroissance n'est pas excessivement grande. Le gain en maillage étant de tout façon réduit avec la régularisation, l'emploi du traitement physique s'en trouve justifié parce qu'il donne accès à la connaissance de la petite échelle.

# Cinquième partie

## Épilogue



---

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Les problèmes de mécanique des fluides dont la formulation classique comporte des singularités sont assez courants. La plupart des études numériques ne tiennent pas compte explicitement de cette difficulté, la justification la plus immédiate étant que le principe de Saint-Venant s'applique. Comme nous en avons discuté dans l'introduction, celui-ci est parfois mis en défaut. C'est le cas pour la ligne de contact mobile ou les écoulements thermocapillaires.

Les singularités liées à des incompatibilités des conditions de frontière ont souvent pour origine une méconnaissance des mécanismes physiques présents aux échelles moléculaires. Dans certains cas, il est possible de formuler des conditions de frontière tenant compte de ces effets locaux et, par là même, rendant le modèle régulier. Dans ce travail un premier objectif a été de mieux cerner la nature des contradictions présentes dans les problèmes singuliers. Dans le cas de la cavité entraînée ou de la ligne de contact mobile, elles sont évidentes. En revanche la singularité des écoulements thermocapillaires confinés a souvent été ignorée par un grand nombre d'auteurs et a nécessité un effort d'analyse pour être explicitée.

Deux modèles s'appliquant aux frontières ont été utilisés dans les configurations de cavité entraînée et des écoulements thermocapillaires : le glissement de Navier et la correction dynamique à la tension de surface formulée par G. Kasperski, qui s'apparente aux modèles de viscosité interfaciale. Ces modèles ont conduit à l'écriture de conditions aux limites non-triviales faisant intervenir de nouveaux paramètres physiques relatifs aux phénomènes introduits. Ces phénomènes étant très locaux, l'emploi des méthodes spectrales s'est avéré un outil de choix pour obtenir une représentation numérique fidèle des échelles introduites, sans filtrage lié à la résolution numérique. Chaque modèle a nécessité de mettre en place un traitement numérique adapté à l'utilisation des méthodes spectrales. Le glissement introduit dans la cavité entraînée a pu être traité par l'utilisation d'un algorithme itératif développé antérieurement à cette thèse. L'algorithme de prise en compte du modèle de viscosité interfaciale par une méthode spectrale est un résultat original de cette thèse ayant donné lieu à une publication (Nguyen et Delcarte [107]). La régularité des modèles a alors pu être caractérisée par la convergence des champs avec le maillage et en particulier de la divergence de la vitesse.

La cavité entraînée a permis d'introduire le modèle de glissement dans une configuration bien connue et d'en mesurer les effets. Un certain nombre de résultats originaux a été obtenu. Nous avons ainsi montré qu'un glissement de Navier ne suffit pas à régulariser le problème et



que la dépendance de la longueur de glissement au cisaillement doit être prise en compte pour rendre le modèle régulier aux premiers ordres différentiels. Ce résultat est en accord avec des études récentes menées en méthodes hybrides dynamique moléculaire/milieu continu. Avec cette modélisation, la vitesse de convergence obtenue sur la divergence de la vitesse est d'ordre 4 en  $N$ , le nombre de points du maillage. L'influence du glissement sur les écoulements a ensuite été étudiée. Nous avons montré que pour les glissements très faibles, les écoulements sont assez bien représentés par la solution du problème régularisé. Les seuils de transitions de l'état stationnaire à l'état périodique présentent alors un bon accord avec les résultats de Fortin *et al.* [48] et Auteri *et al.* [5]. En revanche pour les glissements importants cette transition n'a pu être observée, ce qui met en évidence l'influence des échelles locales sur les échelles globales.

La compatibilité du glissement et de la viscosité interfaciale a été vérifiée sur un problème 1D d'écoulement dans un canal dont la solution analytique est connue. Le rôle de chacun des termes a pu être étudié.

Enfin, ces modèles ont été utilisés pour tenter de lever la singularité des écoulements thermocapillaires. Une étude préliminaire a montré que le filtrage polynômial ne rend pas le problème parfaitement régulier mais que la divergence converge plutôt en  $N^{-4}$ . L'emploi de la condition de Marangoni étendue à la prise en compte d'une viscosité interfaciale et associée à l'adhérence du fluide s'est révélée insuffisante pour lever l'ensemble des incompatibilités. L'emploi conjoint du glissement et de la viscosité interfaciale s'est révélé satisfaisant. La divergence de la vitesse converge alors en  $N^{-2}$ .

Ce travail a montré qu'il était possible d'incorporer à la formulation macroscopique des équations de Navier-Stokes des phénomènes physiques dont les échelles de longueur caractéristiques sont bien inférieures aux échelles de référence du modèle singulier. Il a pu être constaté qu'un choix approprié des phénomènes pris en compte améliore la régularité des solutions numériques et, par conséquent, la prise en compte de la physique du problème. Néanmoins il reste difficile de discerner les phénomènes physiques présents dans la situation réelle.

Les perspectives de ce travail sont multiples. À court terme, les explorations numériques en cavité entraînée pourront être poursuivies de manière à mieux comprendre les écoulements à bas Reynolds ; en particulier, on cherchera si la transition vers l'état périodique existe pour les glissements importants. Enfin l'étude des recirculations dans les coins fixes du domaine présente un intérêt certain. L'étude de l'écoulement local est connu par le biais d'une solution analytique qui ne tient pas compte du glissement. La formulation d'une nouvelle solution incorporant le glissement est envisageable.

Le traitement des écoulements thermocapillaires a fait apparaître la nécessité d'un critère permettant d'identifier les effets appropriés pour une situation donnée. Ceci peut être obtenu par l'utilisation de la dynamique moléculaire mais la puissance de calcul des ordinateurs actuels limite cette dernière à des domaines d'extension limitée. L'emploi du formalisme des interfaces diffuses pourrait permettre de faire le lien entre les simulations aux échelles microscopiques et les calculs macroscopiques. Ce type de formulation permet en effet de tenir compte des forces moléculaires et peut aussi être couplé à l'hydrodynamique. Une fois les effets pertinents identifiés, les conditions aux limites macroscopiques pourraient être déduites par passage à la

limite. Ceci constitue un objectif à long terme qui permettrait de disposer d'outils adaptés à la simulation de situations prenant de plus en plus d'importance avec le développement de la microfluidique et des nanotechnologies.



# DIAGONALISATION PAR BLOCS

## A.1 Coefficients de l'élimination

La résolution du système linéaire suivant :

$$(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})\tilde{u}_{0j} + \tilde{\beta}_{1-} \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{0k} \tilde{u}_{kj} + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x} \tilde{u}_{N_x j} = \tilde{\gamma}'_{1-}(j) \quad (\text{A.1.1})$$

$$(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})\tilde{u}_{N_x j} + \tilde{\beta}_{1+} \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_x)_{N_x k} \tilde{u}_{kj} + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0} \tilde{u}_{0j} = \tilde{\gamma}'_{1+}(j) \quad (\text{A.1.2})$$

en  $\tilde{u}_{0j}$ ,  $\tilde{u}_{N_x j}$  est immédiate.

Il suffit de procéder à la combinaison linéaire suivante des équations :

$$\begin{cases} (\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \times (\text{A.1.1}) & - & \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x} \times (\text{A.1.2}) \\ \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0} \times (\text{A.1.1}) & - & (\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) \times (\text{A.1.2}) \end{cases}$$

qui conduit à :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N_x-1} \left\{ (\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0k}) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x k}) \right\} & \tilde{u}_{kj} \\ + \left\{ (\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) \right\} & \tilde{u}_{0j} \\ = (\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \tilde{\gamma}'_{1-}(j) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x}) \tilde{\gamma}'_{1+}(j) \\ \sum_{k=1}^{N_x-1} \left\{ (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0k}) - (\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x k}) \right\} & \tilde{u}_{kj} \\ + \left\{ (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x}) - (\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) \right\} & \tilde{u}_{N_x j} \\ = (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0}) \tilde{\gamma}'_{1-}(j) - (\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) \tilde{\gamma}'_{1+}(j) \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

Les coefficients  $\tilde{\nu}_{jk}^-$ ,  $\tilde{\nu}_{jk}^+$  et  $\tilde{\mu}_j^-$ ,  $\tilde{\mu}_j^+$  sont alors définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{jk}^- &= \frac{(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x k}) - (\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0k})}{(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})}, \\ \tilde{\nu}_{jk}^+ &= \frac{(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0k}) - (\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x k})}{(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) - (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})}, \\ \tilde{\mu}_j^- &= \frac{(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})\tilde{\gamma}'_{1-}(j) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})\tilde{\gamma}'_{1+}(j)}{(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x})(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00}) - (\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})(\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})}, \\ \tilde{\mu}_j^+ &= \frac{(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})\tilde{\gamma}'_{1+}(j) - (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})\tilde{\gamma}'_{1-}(j)}{(\tilde{\alpha}_{1-}(j) + \tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{00})(\tilde{\alpha}_{1+}(j) + \tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x N_x}) - (\tilde{\beta}_{1+}(\mathcal{D}_x)_{N_x 0})(\tilde{\beta}_{1-}(\mathcal{D}_x)_{0N_x})},\end{aligned}$$

et permettent d'écrire l'expression simplifiée de  $\tilde{u}_{0j}$  et  $\tilde{u}_{N_x j}$  suivante :

$$\tilde{u}_{0j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \tilde{\nu}_{jk}^- \tilde{u}_{kj} + \tilde{\mu}_j^-, \quad (\text{A.1.4a})$$

$$\tilde{u}_{N_x j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} \tilde{\nu}_{jk}^+ \tilde{u}_{kj} + \tilde{\mu}_j^+. \quad (\text{A.1.4b})$$

## A.2 Problème 3D en coordonnées cylindriques

Le cas d'un problème de Helmholtz 3-D en coordonnées cylindrique,  $(r, \varphi, z)$ , défini sur le domaine  $\Omega \equiv ]0, 1] \times [0, 2\pi[ \times [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$  est à présent considéré :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a u = f. \quad (\text{A.2.1})$$

Les conditions aux dérivées mixtes peuvent être appliquée sur la face latérale du cylindre avec, pour simplifier, des conditions de Dirichlet sur les faces restantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial r} = \gamma_1(\varphi, z), & \text{en } r = 1; \\ \alpha_{2\pm} u = \gamma_{2\pm}(r, \varphi), & \text{en } z = \pm 1. \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

Les fonctions réelles,  $f(r, \varphi, z)$ , périodiques en  $\varphi$ , sont approchées par leur série de Fourier discrète tronquée, de la manière suivante :

$$f(r_i, \varphi_k, z_j) = \Re \left( \frac{1}{N_\varphi} \sum_{0 \leq n < N_\varphi} \tilde{f}_k(r_i, z_j) e^{i n \varphi_k} \right).$$

Le champ  $u$  est développé en une série de polynômes de Chebyshev avec un choix classique de points de collocation de Gauss-Radau et de Gauss-Lobatto dans les directions radiales et

axiales, respectivement. Les points de collocation en  $\hat{e}_\varphi$  sont imposés par l'utilisation de la transformée de Fourier discrète.

$$\begin{cases} 2r_i - 1 = -\cos\left(\frac{2(N_r - i)\pi}{2N_r + 1}\right) & i \in \{0, \dots, N_r\} \end{cases} \quad (\text{A.2.3a})$$

$$\begin{cases} z_j = -\cos\left(\frac{j\pi}{N_z}\right) & j \in \{0, \dots, N_z\} \end{cases} \quad (\text{A.2.3b})$$

$$\begin{cases} \varphi_k = \frac{2\pi k}{N_\varphi} & k \in \{0, \dots, N_\varphi - 1\} \end{cases} \quad (\text{A.2.3c})$$

En utilisant la notation discrète suivante,  $\tilde{f}_{(k)ij} = \tilde{f}_k(ij)$ , (A.2.1) (A.2.2) deviennent respectivement :

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] \tilde{u}_{(k)ij} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{(k)ij}}{\partial z^2} - a \tilde{u}_{(k)ij} = \tilde{f}_{(k)ij}, \quad (\text{A.2.4})$$

for  $k = \{0, \dots, N_\varphi - 1\}$ ,

et :

$$0 \leq k < N_\varphi \begin{cases} \tilde{\alpha}_1 \left( -\frac{k^2}{r^2} \tilde{u}_{(k)Nrj} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{(k)Nrj}}{\partial z^2} \right) + \tilde{\beta}_1 \frac{\partial \tilde{u}_{(k)Nrj}}{\partial r} = \tilde{\gamma}_{1(k)}(j), & \text{en } r = 1, \\ \tilde{\alpha}_{2\pm} \tilde{u}_{(k)i|_0^{N_z}} = \tilde{\gamma}_{2\pm(k)}(i), & \text{en } z = \pm 1. \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

Les équations (A.2.4), (A.2.5) peuvent être réorganisées en un système de  $N_\varphi$  équations en  $(r, z)$  auquel s'ajoutent les conditions aux limites correspondantes. La procédure décrite en section 4.2.3.1 peut alors être appliquée. L'étape 3 se trouve simplifiée du fait de l'utilisation de la grille de Gauss-Radau, les équations (4.2.37), (4.2.38), sont remplacées par :

$$\left( \tilde{\alpha}_{1(k)}(j) + \tilde{\beta}_1 (\mathcal{D}_r)_{N_r N_r} \right) \tilde{u}_{(k)Nrj} + \tilde{\beta}_1 \sum_{m=0}^{N_r-1} (\mathcal{D}_r)_{N_r m} \tilde{u}_{(k)mj} = \tilde{\gamma}'_{1(k)}(j). \quad (\text{A.2.6})$$

avec  $\tilde{\alpha}_{1(k)}(j) = \left( (\lambda_{z(k)}(j) - \frac{k^2}{r^2}) \tilde{\alpha}_{1(k)}(j) \right)$ . L'expression de  $\tilde{u}_{(k)Nrj}$  en fonction des points intérieurs est immédiate.



## JONCTION THERMOCAPILLAIRE ET GLISSEMENT

---

Une démonstration similaire à celle de la section 2.2.3 page 16, qui établit l'origine de la singularité des écoulements thermocapillaires confinés peut être donnée dans le cas où la condition d'adhérence à la paroi solide est remplacée par un glissement de Navier. Le raisonnement est effectué dans le cas d'une jonction entre une interface soumise à une contrainte  $\tau$  et une paroi solide glissante formant angle  $\alpha$  quelconque (voir fig. 2.3). En reprenant prenant les coordonnées cartésiennes et la notation de la page 16, le vecteur tangent à la paroi est noté  $\vec{t}$  et le vecteur normal  $\vec{n}$ , voir figure 2.3, définis par rapport aux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  par :

$$\begin{cases} \vec{t} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{z}, \\ \vec{n} = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{z}. \end{cases}$$

De même les composantes de vitesse tangentielle et normale à la paroi,  $v_t$  et  $v_n$ , sont utilisées pour exprimer les conditions de vitesse le long de la paroi solide. Elles s'expriment en fonction des composantes horizontale et verticale de vitesse  $u$  et  $w$  comme :

$$\begin{cases} v_t = \vec{V} \cdot \vec{t} = u \cos \alpha + w \sin \alpha, \\ v_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = -u \sin \alpha + w \cos \alpha. \end{cases}$$

Le long de l'interface les conditions sur la vitesse demeurent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} = 1 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (\text{B.1})$$

le long de la paroi inclinée le glissement remplace l'adhérence et les conditions deviennent :

$$l_s \vec{\nabla} v_t \cdot \vec{n} = v_t \quad \text{et} \quad v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} v_n \cdot \vec{t} = 0. \quad (\text{B.2})$$



Il n'est donc plus vrai que  $\vec{\nabla}v_t \cdot \vec{t} = 0$  le long de la paroi solide. Les conditions sur la vitesse le long de la paroi solide peuvent être développées pour arriver au système :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}v_t \cdot \vec{n} &= -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \cos^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= l_s^{-1} \left( \cos \alpha u + \sin \alpha w \right),\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

$$\vec{\nabla}v_n \cdot \vec{t} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial x} - \sin^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.5})$$

qui comporte cinq inconnues pour deux équations. Au point triple la relation :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.6})$$

qui provient de la non déformabilité de l'interface, permet de réduire le nombre d'inconnues à quatre. Par ailleurs le fait que le solide n'est pas poreux et que la jonction est fixe impose que  $u$  s'annule au point triple. L'équation (B.4) devient alors :

$$\vec{\nabla}v_t \cdot \vec{n} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \cos^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.7})$$

Ce qui réduit le nombre d'inconnues à trois. En considérant le fluide comme incompressible (ce qui est tout à fait raisonnable dans l'approximation de Stokes) la contrainte de divergence nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.8})$$

permet de ramener le nombre d'inconnues à deux. Après quelques simplifications le système peut être transformé en :

$$\cos^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{B.9})$$

$$-\sin^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{B.10})$$

qui s'applique à la jonction et ne peut être vérifié pour tout  $\alpha$  que si  $\frac{\partial u}{\partial z}$  s'annule dans le coin. La condition de Marangoni est donc contredite puisqu'elle impose que  $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ . La singularité de vorticité des écoulements thermocapillaires n'est donc pas levée par l'introduction d'un glissement et ce quel que soit l'angle formé par l'interface et la paroi solide à la jonction. Il est intéressant de constater que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  peut prendre n'importe quelle valeur a priori puisqu'il peut être éliminé du système précédent. Ceci montre de plus que la condition de glissement peut non seulement permettre de satisfaire la contrainte d'incompressibilité pour un angle droit, comme discuté en section 9.3.1 page 179, mais aussi pour un angle quelconque.

---

# Bibliographie

---

- [1] D. M. Anderson, G. B. McFadden et A. A. Wheeler. «Diffuse-interface methods in fluid mechanics». *Ann. Rev. Fluid Mech.*, (30), pp. 139–165 (1998).
- [2] C. Andrieu, D. A. Beyssens, V. S. Nikolaev et Y. Pomeau. «Coalescence of sessile drops». *J. Fluid Mech.*, **453**, pp. 427–438 (2002).
- [3] L. K. Antanovskii. «Microscale theory of surface tension». *Phys. Rev. E*, **54**(6), pp. 6285–6290 (1996).
- [4] L. K. Antanovskii. «A phase field model of capillarity». *Phys. Fluids*, **7**(4), pp. 747–753 (1995).
- [5] F. Auteri, N. Parolini et L. Quartapelle. «Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow». *J. Comput Phys.*, **185**, pp. 1–25 (2002).
- [6] F. Auteri, L. Quartapelle et L. Viggiano. «Accurate  $\omega - \psi$  spectral solution of the singular driven cavity problem». *J. Comput. Phys.*, **180**, pp. 597–615 (2002).
- [7] F. Auteri et L. Quartapelle. «Galerkin spectral method for the vorticity and stream function equations». *J. Comput. Phys.*, **149**, pp. 306–322 (1999).
- [8] J.-L. Barrat et L. Bocquet. «Influence of wetting properties on hydrodynamic boundary conditions at a fluid-solid interface». *Faraday discussions*, (112), pp. 121–129 (1999).
- [9] A. Batoul. *Simulation numérique d'écoulements thermocapillaires en croissance cristalline*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay (1995).
- [10] A. Batoul, H. Khallouf et G. Labrosse. «Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée». *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **319**(Série II), pp. 1455–1461 (1994).
- [11] D. Bedeaux et I. Oppenheim. «Hydrodynamic response and free surface modes for two immiscible fluids». *Physica A*, **90**, pp. 39–57 (1978).

- [12] D. Bedeaux, A. M. Albano et P. Mazur. «Boundary conditions and non-equilibrium thermodynamics». *Physica A*, **82**, pp. 438–462 (1976).
- [13] T. D. Blake, M. Bracke et Y. D. Shikhmurzaev. «Experimental evidence of nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle». *Phys. Fluids*, **11**(8), pp. 1995–2007 (1999).
- [14] O. Botella et R. Peyret. «Computing singular solutions of the Navier-Stokes equations with the Chebyshev-collocation method». *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **36**(2), pp. 125–163 (2001).
- [15] O. Botella et R. Peyret. «Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow». *Comput. Fluids*, **27**(4), pp. 421–433 (1998).
- [16] O. Botella. *Résolution numérique de problèmes de Navier-Stokes singuliers par une méthode de projection Tchebychev*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis (1998).
- [17] O. Bouizi. *Instabilités 3D de convection thermocapillaire en zone-flottante*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay (2004).
- [18] M. J. Boussinesq. «Sur l’existence d’une viscosité superficielle dans la mince couche de transition séparant un liquide d’un autre fluide contigu». *Ann. Chim. Phys.*, **29**, pp. 349–364 (1913).
- [19] M. Brillouin. *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz* (Gauthier-Villars, 1907).
- [20] O. R. Burggraf. «Analytical and numerical studies of the structures of steady separated flows». *J. Fluid Mech.*, **24**(1), pp. 113–151 (1966).
- [21] J. W. Cahn et J. E. Hilliard. «Free energy of non-uniform system. I. Interfacial free energy». *J. Chem. Phys.*, **28**(2), pp. 258–267 (1958).
- [22] D. Canright. «Thermocapillary flow near a cold wall». *Phys. Fluids*, **6**(4), pp. 1415–1424 (1994).
- [23] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni et T. A. Zang. *Spectral methods in fluid Dynamics*. Springer series in Computational Physics (Springer, 1988), 1<sup>re</sup> édition.
- [24] P. Cardin, H.-C. Nataf et P. Dewost. «Thermal coupling in layered convection : evidence for an interface viscosity control from mechanical experiments and marginal stability analysis». *J. Phys. II*, **1**(6), pp. 599–622 (1991).
- [25] A. Carré et P. Woehl. «Hydrodynamic behavior at the triple line of spreading liquids and the divergence problem». *Langmuir*, **18**, pp. 3600–3603 (2002).

- [26] I. Catton. «Effect of wall conduction on the stability of a fluid in a rectangular region heated from below». *Int. J. Heat Mass Transfer*, **C**(94), pp. 446–452 (1972).
- [27] P. Cerisier, S. Rahal, J. Cordonnier et G. Lebon. «Thermal influence of boundaries on the onset of Rayleigh-Bénard convection». *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21**(41), pp. 3309–3320 (1998).
- [28] É. Chénier, C. Delcarte, G. Kasperski et G. Labrosse. *Thermocapillary flows and vorticity singularity, Lecture notes in Physics*, tome 628, pp. 176–199 (Springer-Verlag Heidelberg, 2003).
- [29] É. Chénier, C. Delcarte, G. Kasperski et G. Labrosse. «Sensitivity of the liquid bridge hydrodynamics to local capillary contributions». *Phys. Fluids*, **14**, pp. 3109–3117 (2002).
- [30] É. Chénier. *Étude de la stabilité linéaire des écoulements thermocapillaires et thermogravitationnels en croissance cristalline*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay (1997).
- [31] N. V. Churaev, V. D. Sobolev et A. N. Somov. «Slippage of liquids over lyophobic solid surfaces». *J. Colloid Interface Sci.*, **97**(2), pp. 574–581 (1984).
- [32] C. Cottin-Bizonne, J.-L. Barrat, L. Bocquet et É. Charlaix. «Low friction flows of liquids at nanopatterned interfaces». *Nature Materials*, (2), p. 238 (2003).
- [33] C. Cottin-Bizonne, S. Jurine, J. Baudry, J. Crassous, F. Restagno et É. Charlaix. «Nanorheology : an investigation of the boundary condition at hydrophobic and hydrophilic interfaces». *European Physical Journal E*, **9**(1), pp. 47–53 (2002).
- [34] R. G. Cox. «The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow». *J. Fluid Mech.*, **168**, pp. 169–194 (1986).
- [35] V. S. J. Craig, C. Neto et D. R. M. Williams. «Shear dependent boundary slip in aqueous Newtonian liquid». *Phys. Rev. Lett.*, **87**(5), pp. 054504(1–4) (2001).
- [36] H. Dang-Vu et C. Delcarte. «An accurate solution of the Poisson equation by the Chebyshev collocation method». *J. Comput. Phys.*, **104**(1), pp. 211–220 (2001).
- [37] S. H. Davis. «Convection in a box : Linear theory». *J. Fluid Mech.*, **3**(30), pp. 465–478 (1967).
- [38] W. Dean et P. Montagnon. «On the steady motion of viscous liquid in a corner». *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45**, p. 389 (1949).
- [39] M. M. Denn. «Extrusion instabilities and wall slip». *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **33**, pp. 267–287 (2001).

- [40] J.-A. Désidéri. *Modèles discrets et Schémas Itératifs* (Hermes, Éditions Hermes, 8 quai du marché-Neuf, 75004 Paris, 1998), 1<sup>re</sup> édition. URL <http://www.editions-hermes.fr>.
- [41] P. A. Durbin. «Considerations on the moving contact-line singularity, with application to frictional drag on a slender drop». *J. Fluid Mech.*, **197**, pp. 157–169 (1988).
- [42] E. B. Dussan. «The moving contact line : the slip boundary condition». *J. Fluid Mech.*, **77**(4), pp. 665–684 (1976).
- [43] E. B. Dussan et S. H. Davis. «On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface». *J. Fluid Mech.*, **65**(1), pp. 71–95 (1974).
- [44] J. C. Earnshaw et J. C. Hughes. «High-frequency capillary waves on the clean surface of water». *Langmuir*, **7**, pp. 2419–2421 (1991).
- [45] D. A. Edwards, H. Brenner et T. Wasan. *Interfacial transport processes and rheology*. Butterworth-Heinemann series in chemical engineering (Butterworth-Heinemann, 1991), 1<sup>re</sup> édition.
- [46] M. Fermigier. *Dynamique d'une interface liquide dans un capillaire*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1989).
- [47] J. M. Floryan et L. Czechowski. «On the numerical treatment of corner singularity in the vorticity field». *J. Comput. Phys.*, **118**, pp. 222–228 (1995).
- [48] A. Fortin, M. Jardak, J.-J. Gervais et R. Pierre. «Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems». *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **24**, pp. 1185–1210 (1997).
- [49] R. Gatignol et R. Prud'homme. *Second gradient theory applied to interfacial medium* (World scientific Publishing Co., 2001).
- [50] T. B. Gatski, C. E. Grosch et M. E. Rose. «A numerical study of the two-dimensional Navier-Stokes equations in vorticity velocity variables». *J. Comput. Phys.*, **48**, pp. 1–22 (1982).
- [51] P. G. de Gennes. «On fluid/wall slippage». *Langmuir*, **18**(9), pp. 3413–3414 (2002).
- [52] P. G. de Gennes, X. Hua et P. Levinson. «Dynamics of wetting : local contact angles». *J. Fluid Mech.*, **212**, pp. 55–63 (1990).
- [53] U. Ghia, K. N. Ghia et C. T. Shin. «High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method». *J. Comput. Phys.*, **48**(3), pp. 387–411 (1982).
- [54] K. Goda. «A multistep technique with implicit difference scheme for calculating two- or three-dimensional cavity flows». *J. Comput. Phys.*, **30**, pp. 76–95 (1979).

- [55] S. Goldstein. *Note on the conditions at the surface of contact of a fluid with a solid*, *The Oxford engineering science series*, tome 2, pp. 676–680 (Oxford Clarendon Press, 1938).
- [56] A. Gomilko, V. Malyuga et V. Meleshko. «On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner». *J. Fluid Mech.*, **476**, pp. 159–177 (2003).
- [57] F. C. Goodrich. «Theory of capillary excesses viscosity». *Proc. R. Soc. London*, **374**(A), pp. 341–367 (1981).
- [58] H. Gouin. «The wetting problem of fluids on solid surfaces. Part 1 : The dynamics of contact lines». *Cont. Mech. and Therm.*, **15**, pp. 581–596 (2003).
- [59] S. R. de Groot et P. Mazur. *Non-equilibrium thermodynamics*. Réédition du texte de 1962, (Dover Publications, 1984).
- [60] M. M. Gupta. «A comparison of numerical solutions of convective and divergence forms of the Navier-Stokes equations for the driven cavity problem». *J. Comput. Phys.*, **43**, pp. 260–267 (1981).
- [61] M. M. Gupta, R. P. Manohar et B. Noble. «Nature of viscous flow near sharp corners». *Comput. Fluids*, **9**(4), pp. 379–388 (1981).
- [62] D. H. Haidvogel et T. A. Zang. «The accurate solution of Poisson’s equation by expansion in Chebyshev polynomials». *J. Comput. Phys.*, **30**, pp. 167–180 (1979).
- [63] P. Haldenwang, G. Labrosse, S. Abboudi et M. Deville. «Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation». *J. Comput. Phys.*, **55**, pp. 115–128 (1984).
- [64] C. Hancock, E. Lewis et H. K. Moffatt. «Effects of inertia in forced corner flows». *J. Fluid Mech.*, **112**, pp. 315–327 (1981).
- [65] E. B. Hansen et M. A. Kelmanson. «An integral equation justification of the boundary conditions of the driven-cavity problem». *Computers Fluids*, **23**(1), pp. 225–240 (1994).
- [66] C. P. Hills et H. K. Moffatt. «Rotary honning : a variant of the Taylor paint-scraper problem». *J. Fluid Mech.*, **418**, pp. 119–135 (2000).
- [67] L. M. Hocking. «The wetting of a plane surface by a fluid». *Phys. Fluids*, **7**(6), pp. 1214–1220 (1995).
- [68] L. M. Hocking. «The spreading of drops with intermolecular forces». *Phys. Fluids*, **6**(10), pp. 3224–3228 (1994).
- [69] L. M. Hocking. «The influence of intermolecular forces on thin fluid layers». *Phys. Fluids*, **5**(4), pp. 793–799 (1993).

- [70] L. M. Hocking et A. D. Rivers. «The spreading of a drop by capillary action». *J. Fluid Mech.*, **121**, pp. 425–442 (1982).
- [71] L. M. Hocking. «A moving fluid interface. Part2. The removal of the force singularity by a slip flow.». *J. Fluid Mech.*, **79**(2), pp. 209–229 (1977).
- [72] L. M. Hocking. «A moving fluid interface on a rough surface». *J. Fluid Mech.*, **76**(4), pp. 801–817 (1976).
- [73] C. O. Horgan. «Recent developements concerning Saint-Venant’s principle». *Appl. Mech. Rev.*, **48**, pp. 101–111 (1996).
- [74] C. O. Horgan. «Decay estimates for the biharmonic equation with application to Saint-Venant principles in plane elasticity and Stokes flow». *Quart. Appl. Math.*, **47**, pp. 147–157 (1989).
- [75] R. G. Horn, O. I. Vinogradova, M. E. Mackay et N. Phan-Thien. «Hydrodynamic slippage inferred from thin film drainage measurements in a solution of nonadsorbing polymer». *J. Chem. Phys.*, **112**(14), pp. 6424–6443 (2000).
- [76] C. Huh et S. G. Mason. «The steady movement of a liquid meniscus in a capillary tube». *J. Fluid Mech.*, **81**(3), pp. 401–419 (1977).
- [77] C. Huh et L. E. Scriven. «Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line». *J. Colloid Interface Sci.*, **35**(1), pp. 85–101 (1971).
- [78] D. Jacqmin. «Contact-line dynamics of a diffuse fluid interface». *J. Fluid Mech.*, (402), pp. 57–88 (2000).
- [79] D. Jacqmin. «Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling». *J. Comput. Phys.*, **155**, pp. 96–127 (1999).
- [80] D. Jamet, D. Torres et J. U. Brackbill. «On the theory and computation of surface tension : elimination of parasitic currents through energy conservation of parasitic currents in the second gradient method». *J. Comput. Phys.*, **182**, pp. 262–276 (2002).
- [81] D. Jamet, O. Lebaigue, N. Coutris et J. M. Delhay. «The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change». *J. Comput. Phys.*, **169**, pp. 624–651 (2001).
- [82] K. M. Jansons. «Moving contact lines at non-zero capillary number». *J. Fluid Mech.*, **167**, pp. 393–407 (1986).
- [83] D. Jasnow et J. Viñals. «Coarse-grained description of thermo-capillary flow». *Phys. Fluids*, **8**(3), pp. 660–669 (1995).

- [84] G. E. Karniadakis, M. Israeli et S. A. Orszag. «High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations». *J. Comput. Phys.*, **97**, pp. 414–443 (1991).
- [85] B. Karp. «Dynamic version of Saint-Venant’s principle—historical account and recent results». *Nonlinear Analysis*, (Article en cours de publication) (2005).
- [86] G. Kasperski et G. Labrosse. «On the numerical treatment of viscous singularities in wall-confined thermocapillary convection». *Phys. Fluids*, **12**(11), pp. 2695–2697 (2000).
- [87] G. Kasperski. *Convection thermocapillaire bidimensionnelle en pont liquide chauffé latéralement*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay (1999).
- [88] J. Kim et C.-J. Kim. «Nanostructured surfaces for dramatic reduction of flow resistance in droplet-based microfluids». Dans *IEEE conference MEMS, Las Vegas* (2002).
- [89] J. K. Knowles. «On Saint-Venant’s principle in linear theory of elasticity». *Arch. Rational Mech. Anal.*, **21**(1), pp. 1–21 (1966).
- [90] J. Koplik et J. R. Banavar. «Reentrant corner flows of Newtonian and non-Newtonian fluids». *J. Rheol.*, **41**(3), pp. 787–805 (1997).
- [91] J. Koplik et J. R. Banavar. «Corner flow in the sliding plate problem». *Phys. Fluids*, **7**(12), pp. 3118–3125 (1995).
- [92] J. Koplik et J. R. Banavar. «Continuum deductions from molecular hydrodynamics». *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **27**, pp. 257–292 (1995).
- [93] J. Koplik, J. R. Banavar et J. F. Willemsen. «Molecular dynamics of fluid flow at solid surfaces». *Phys. Fluids A*, **5**(1), pp. 781–794 (1989).
- [94] J. Koplik, J. R. Banavar et J. F. Willemsen. «Molecular dynamics of poiseuille flow and moving contact lines». *Phys. Rev. Lett.*, **60**(13), pp. 1282–1285 (1988).
- [95] D. Langevin. *Viscoelasticity of monolayers*, pp. 5584–5599 (Dekker, 2002).
- [96] P. Le Quéré. *Étude de la transition à l’instationnarité des écoulements de la convection naturelle en cavité verticale différentiellement chauffée par méthodes spectrales Tchebycheff : application à la convection naturelle*. Thèse de doctorat d’état, Université de Poitiers (1987).
- [97] É. Leriche, E. Perchat, G. Labrosse et M. O. Deville. «Numerical evaluation of the accuracy and stability properties of high-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting». *Kluwer J. Sci. Comput.* (2004).
- [98] É. Leriche et G. Labrosse. «High-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting : numerical investigations of their comparative properties». *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**(4), pp. 1386–1410 (2000).



- [99] M. Linthion et K. L. Sutherland. «Dynamic surface forces, drop circulation, and liquid-liquid mass transfer». Dans *Proc. 2nd Int. Congr. Surface Activity*, tome I, pp. 494–502 (Butterworths, London and Academic Press, New York, 1957).
- [100] R. J. Mannheimer et R. S. Schechter. «An improved apparatus and analysis for surface rheological measurements». *J. Colloid Interface Sci.*, **32**, pp. 195–211 (1970).
- [101] L. Martin Witkowski et J. S. Walker. «Solutocapillary instabilities in liquid bridges». *Phys. Fluids*, **14**(8), pp. 2647–2656 (2002).
- [102] B. Mathieu. *Études physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulement diphasiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I (2003).
- [103] E. Millour, G. Labrosse et É. Tric. «Sensitivity of binary liquid thermal convection to confinement». *Phys. Fluids*, **15**(10), pp. 2791–2802 (2003).
- [104] H. K. Moffatt. «Viscous and resistive eddies near a sharp corner». *J. Fluid Mech.*, **18**, pp. 1–18 (1964).
- [105] J. Monnier et P. Witomski. «Analysis of a local hydrodynamic model with Marangoni effect». *J. Sc. Comp.*, **21**(3), pp. 369–403 (2004).
- [106] C. G. Ngan et E. B. Dussan. «On the nature of the dynamic contact angle : an experimental study». *J. Fluid Mech.*, **118**, pp. 27–40 (1982).
- [107] S. Nguyen et C. Delcarte. «A spectral collocation method to solve helmholtz problems with boundary conditions involving mixed tangential and normal derivatives». *J. Comput. Phys.*, **200**, pp. 34–49 (2004).
- [108] X. Nie, S. Chen et M. O. Robbins. «Hybrid continuum-atomistic simulation of singular corner flow». *Phys. Fluids*, **16**(10), pp. 3579–3591 (2004).
- [109] J. G. Oldroyd. «The effect of stabilizing films on the elastic and viscous properties of emulsions». *Proc. R. Soc. London*, **232**(A), pp. 567–577 (1955).
- [110] S. A. Orszag, M. Israeli et M. O. Deville. «Boundary conditions for incompressible flows». *J. Sci. Comput.*, **1**(1), pp. 75–111 (1986).
- [111] L. M. Pismen et B. Y. Rubinstein. «Kinetic slip condition, van der Waals forces, and dynamic contact angle». *Langmuir*, **17**, pp. 5265–5270 (2001).
- [112] L. M. Pismen, B. Y. Rubinstein et I. Bazhlekoy. «Spreading of a wetting film under the action of van der Waals forces». *Phys. Fluids*, **12**(3), pp. 480–483 (2000).

- [113] L. M. Pismen et Y. Pomeau. «Disjoining potential and spreading of thin liquid layers in the diffuse-interface model coupled to hydrodynamics». *Phys. Rev. E*, **62**(2), pp. 2480–2492 (2000).
- [114] L. M. Pismen et A. Nir. «Motion of contact line». *Phys. Fluids*, **25**(1), pp. 3–7 (1982).
- [115] R. Pit, H. H. et L. Liliane. «Direct experimental evidence of slip in hexadecane». *Phys. Rev. Lett.*, **85**(5), pp. 980–983 (2001).
- [116] R. Pit. *Mesure locale de la vitesse à l'interface solide-liquide simple : glissement et rôle des interactions*. Thèse de doctorat, Université Paris XI (1999).
- [117] J. K. Platten et J.-C. Legros. *Convection in liquids* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [118] Y. Pomeau. «Représentation de la ligne de contact mobile dans les équations de la mécanique des fluides». *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328**(IIb), pp. 411–416 (2000).
- [119] T. Qian et X.-P. Wang. «Driven cavity flow : from molecular dynamics to continuum hydrodynamics» (2004). Trouvé sur arxiv.org.
- [120] V. C. Regnier, P. M. Parmentier, G. Lebon et J. K. Platten. «Numerical simulations of interface viscosity effects on thermoconvective motion in two-dimensional rectangular boxes». *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**(14), pp. 2539–2548 (1995).
- [121] S. Richardson. «On the no-slip boundary condition». *J. Fluid Mech.*, **59**(4), pp. 707–719 (1973).
- [122] J. S. Rowlinson et B. Widom. *Molecular theory of capillarity* (Oxford, Oxfordshire : Clarendon Press, 1982).
- [123] E. Ruckenstein. «The moving contact line of a droplet on a smooth solid». *J. Colloid Interface Sci.*, **170**(1), pp. 284–286 (1995).
- [124] A.-J.-C. de Saint Venant. «Mémoire sur la flexion des poutres». *J. de Mathématiques pures et appliquées*, (Deuxième série, Tome I), pp. 83–96 (1856).
- [125] E. Schnell. «Slippage over nonwetable surfaces». *J. App. Phys.*, **27**(10), pp. 1149–1152 (1956).
- [126] W. W. Schultz, N.-Y. Lee et J. P. Boyd. «Chebyshev pseudospectral method of viscous flows with corner singularities». *Kluwer J. Sci. Comput.*, **4**, pp. 1–24 (1989).
- [127] L. E. Scriven. «Dynamics of a fluid interface. Equation of motion for Newtonian surface fluids». *Chem. Engng. Sci.*, **12**, pp. 98–108 (1960).
- [128] P. Seppecher. «Moving contact lines in the Cahn-Hilliard theory». *Int. J. Eng. Sci.*, **34**(9), pp. 977–992 (1996).

- [129] P. Seppecher. *Étude d'une modélisation des zones capillaires fluides : interfaces et lignes de contact*. Thèse de doctorat, Université Paris VI Pierre et Marie Curie (1987).
- [130] P. N. Shankar et M. D. Deshpande. «Fluid mechanics in the driven cavity». *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **32**, p. 93–136 (2000).
- [131] J. Shen. «Hopf bifurcation of the driven cavity flow». *J. Comput Phys.*, **95**, pp. 228–245 (1991).
- [132] J. Shen. «Numerical simulation of the regularized driven cavity flows at high Reynolds numbers». Dans *Spectral and high order methods for partial differential equations (Como, 1989)*, pp. 273–280 (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [133] Y. D. Shikhmurzaev. «Moving contact lines in liquid/liquid/solid systems». *J. Fluid Mech.*, **334**, pp. 211–249 (1997).
- [134] Y. D. Shikhmurzaev. «Mathematical modeling of wetting hydrodynamics». *Fluid Dynamics Research*, **13**, pp. 45–64 (1994).
- [135] Y. D. Shikhmurzaev. «The moving contact line on a smooth solid surface». *Int. J. Multiphase Flow*, **19**(4), pp. 589–610 (1993).
- [136] Y. D. Shikhmurzaev. «A two-layer model of an interface between immiscible fluids». *Physica A*, **192**, pp. 47–62 (1993).
- [137] L. Solomon. *Principe de Saint-Venant*, chapitre 4, §6 b), pp. 117–119 (Masson et Cie, 1968).
- [138] C. V. Sternling et L. E. Scriven. «Interfacial turbulence : hydrodynamic instability and the Marangoni effect». *AIChE Journal*, **5**(4), pp. 514–523 (1959).
- [139] T. Störtkuhl, C. Zenger et S. Zimmer. «An asymptotic solution for the singularity at the angular point of the lid driven cavity». *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, **4**, pp. 47–59 (1994).
- [140] G. I. Taylor. *The scientific papers of sir Geoffrey Ingram Taylor*, tome IV, article «On scraping viscous fluid from a plane surface», pp. 410–413 (Cambridge Univ. Press U.K., 1962).
- [141] P. A. Thompson et S. M. Troian. «A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces». *Nature*, **389**, pp. 360–362 (1997).
- [142] P. A. Thompson et M. O. Robbins. «Shear flow near solids : epitaxial order and flow boundary conditions». *Phys. Rev. A*, **41**(12), pp. 6830–6837 (1990).
- [143] P. A. Thompson et M. O. Robbins. «Simulations of contact-line motion : slip and the dynamic contact angle». *Phys. Rev. Lett.*, **63**(7), pp. 766–769 (1989).

- [144] D. M. Tolstoi. «Molecular theory of the slip of liquids on solid surfaces». *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, **85**, pp. 1089–1092 (1952).
- [145] D. C. Tretheway et C. D. Meinhardt. «Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls». *Phys. Fluids*, **14**(3), pp. L9–L12 (2002).
- [146] M. A. Vila, V. A. Kuz et A. E. Rodríguez. «Surface viscosity of pure liquids». *J. Colloid Interface Sci.*, **107**(2), pp. 314–321 (1985).
- [147] O. Vinogradova, N. F. Bunkin, N. V. Churaev, O. A. Kiseleva, A. V. Lobeyev et B. W. Ninham. «Submicrocavity structure of water between hydrophobic and hydrophilic walls as revealed by optical cavitation». *J. Colloid Interface Sci.*, **173**, pp. 443–447 (1995).
- [148] J. D. van der Waals. «The thermodynamic theory of capillarity flow under the hypothesis of a continuous variation of density». *J. Stat. Phys.*, **20**, p. 197 (1893 - traduction anglaise 1979).
- [149] K. Watanabe, Y. Udagawa et H. Udagawa. «Drag reduction of Newtonian fluid in a circular pipe with a highly water-repellent wall». *J. Fluid Mech.*, **381**, pp. 225–238 (1999).
- [150] D. E. Weidner et L. W. Schwartz. «Contact-line motion of shear-thinning liquids». *Phys. Fluids*, **6**(11), pp. 3535–3538 (1994).
- [151] A. Zebib, G. H. Homsy et E. Meiburg. «High Marangoni number convection in a square cavity». *Phys. Fluids*, **28**(12), pp. 3467–3476 (1985).
- [152] Y. Zhu et S. Grannick. «Limits of the hydrodynamic no-slip boundary condition». *Phys. Rev. Lett.*, **88**(10), pp. 106102(1–4) (2002).